

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 16 ottobre 1910.*

~~~~~  
*Astronomia. — Sulla determinazione del tempo coi passaggi meridiani. Nota del Corrispondente A. ABETTI.*

Nell'esercizio delle mie funzioni astronomiche fino dall'inizio della mia carriera io mi sono sempre sentito stimolato ad ottenere nelle mie determinazioni di tempo il migliore e più pronto risultato che potevano darmi i mezzi lasciati a mia disposizione, e feci studi e prove che mi portarono ad utili conseguenze già rese di pubblica ragione.

Innanzitutto dirò che negli studi fatti trovai dapprima largo e benevolo consiglio da parte del mio direttore all'Osservatorio di Padova, il professore Lorenzoni che fu il mio maestro, poscia ebbi efficace cooperazione dal secondo astronomo di Arcetri l'attuale mio collaboratore prof. Viaro. Ed ora passerò a dire che in Padova, circa il 1875, allorquando ho potuto disporre dell'istrumento dei passaggi di Ertel *rapidamente invertibile* e del *cronografo*, ne profittai per mettere in uso la pratica di invertire l'asse di rotazione del cannocchiale sui suoi cuscinetti nel mezzo del passaggio di ogni oraria, così che ogni stella veniva osservata immediatamente nelle due posizioni, diretta ed invertita del cannocchiale agli stessi fili, per eliminare le distanze di questi e l'errore di collimazione, guadagnando in rapidità di osservazioni e di calcoli ed in precisione di risultati. Si comprende subito che con siffatta simmetria la media aritmetica  $t$  dei tempi dei passaggi agli stessi fili nelle due posizioni strumentali anche di una sola stella

prossima al zenit, ed essendo lo strumento bene rettificato in inclinazione <sup>(1)</sup> ed azimut, dà immediatamente col confronto  $AR - t$  (dove  $AR$  sta per ascen. retta), una sufficiente correzione  $\Delta t$  dell'orologio siderale registrante sul cronografo. È facile poi a questo punto pensare a due cose; primo che osservando la stessa stella da uno agli altri giorni seguenti si può avere con buona precisione anche l'*andamento medio diurno* dell'orologio; secondo che se i passaggi possono venire registrati automaticamente sulla striscia cronografica in causa dell'inseguimento della stella col filo mobile del micrometro (siccome verremo in cognizione più avanti in questo scritto) si raccoglieranno, con facilità e speditezza, un numero grande di doppi passaggi, i quali per la loro bontà e pel loro numero aumenteranno la precisione di  $t$ .

Ma abbandonando il vincolo della stella zenitale, e volendo dallo strumento dei passaggi, adoperato come qui s'intende, il maggior rendimento, considereremo che per ogni stella osservata debba essere,

$$AR - t = \Delta t + az$$

dove  $a$  è il coefficiente d'azimut nella formola di Mayer e  $z$  l'azimut del cerchio massimo instrumentale *verticale*, a cui si riferisce il  $t$  che pertanto si intenderà, sempre, spoglio di  $i$  e della collimazione.

Con due equazioni simili date da due stelle diverse avremo  $\Delta t$  e  $z$ ; ma la diversità deve esser tale per cui i due  $a$  sieno essi pure sensibilmente diversi, e meglio che mai di segno opposto. Quest'ultima condizione si verifica, come bene si sa, con una stella a sud del zenit detta *l'oraria*, e con un'altra a nord detta la *polare*; ed ora possiamo aggiungere che è così che negli osservatori astronomici nacque la pratica di osservare due stelle siffatte per avere dalla loro combinazione le due incognite in discorso. Naturalmente i due valori di  $\Delta t$  dedotti da due sole equazioni concordano fino all'ultima cifra, ma quando si sieno osservate più stelle siamo in presenza di più equazioni della forma indicata dalle quali dovremo trarre i valori più probabili di  $\Delta t$  e  $z$ . Per fare ciò si potrebbero combinare le stelle con simmetria a due, a due, ammesso che fosse possibile averle scelte ed osservate a coppie simmetricamente intorno al zenit, e così si ricaverebbero valori separati di  $\Delta t$  e  $z$  i quali oltre alla loro grandezza ci darebbero altresì la loro variazione nell'intervallo delle osservazioni previo che queste sieno, dirò così, le più raffinate. Ma per un dato luogo una successione rapida di stelle circumzenitali formanti coppie appropriate all'intento non si trova nelle nostre

(1) Naturalmente ognuno che è pratico di passaggi meridiani sa come si tien conto di  $i$  colla livella, ma qui possiamo aggiungere che  $i$  si ha presto e bene, con tutta simmetria e spoglio dell'influenza dovuta alla differente grossezza dei perni, quando la livella è costantemente appesa all'asse come nel piccolo meridiano di Arcetri. Inoltre noteremo che quanto si dice valevole per una stella vale anche per il sole, col quale poi si può invertire due volte, una per ciascun lembo.



classiche odierne effemeridi, e per combinarle bisognerebbe lasciar andare perdute nel frattempo una più o stelle che bene servirebbero a dare equazioni della forma voluta. Piuttosto che lusingarmi con siffatte coppie, io, anni or sono, mi sentii invaghito pel metodo del Döllén in cui la stella boreale è una, e sempre la stessa in ogni istante che si voglia determinare il tempo, e le orarie sono le consuete come si succedono nelle effemeridi. Ed in proposito scrissi a Padova, nel 1880 una Nota <sup>(1)</sup> mostrando con un esempio siccome il metodo del Döllén, od altrimenti detto *del verticale della Polare* ( $\alpha$  Ursae minoris), poteva coll'inversione rapida dello strumento, e col micrometro, esser ridotto ai minimi termini, cioè tanto spedito in osservazione e calcolo da meritare di essere impiegato correntemente specie negli osservatori stabili. Ed a Padova ne feci buon uso, ed ebbi la compiacenza di vedersene interessare il prof. Lorenzoni, che tanto lo prese a cuore da volerlo impiegare colla mia collaborazione, nel 1882 ed 84, nella differenza di longitudine fra Padova ed Arcetri. Egli stesso fece allora i programmi e dettò la migliore e più semplice teoria come si trova esposta nella pubblicazione della Commissione Geodetica Italiana che ha per titolo: *Differenze di longitudine fra Roma, Padova ed Arcetri* (Padova, tip. del Seminario, 1891). Quantunque io fossi allora partigiano di tal metodo, così che venendo direttore nel 1894 in Arcetri, volli che il piccolo meridiano da me ideato ed ordinato a Bamberg in Berlino fosse provvisto della sottobase [Grundplatte mit Azimutalkorrektion] capace di pronti e regolari cambiamenti negli azimut della polare (che si sa essere contenuti entro un paio di gradi) tuttavia, sia perchè lo strumento tardasse a venire costringendomi ad adoperarne in sua vece altri meno adatti, sia perchè trovandomi ancora solo, sopraffatto di lavoro, dovessi ricorrere a mezzi ancor più sbrigativi, sia perchè incominciassi a vedere la cosa altrimenti, fatto sta che dal 1894 abbandonai in Arcetri la pratica di muovere lo strumento in azimut e mi imposi la nuova regola di mantenerlo costantemente nel solo verticale il più prossimo possibile al meridiano, per osservare quelle qualsiasi stelle (in numero di quattro, cinque per volta) che più prontamente venivano esibite dalle effemeridi di Berlino da me sempre preferite ed adoperate. Così facendo, entro un'ora o meno d'intervallo, venivo ogni volta a ritrovarmi con quattro, cinque o più equazioni, le quali io risolveva con un metodo mio proprio che dirò brevemente [AA] e che esposi in appendice al fasc. 6 delle pubblicazioni di Arcetri (fascicolo che contiene le osservazioni astronomiche del 1896), ed anzi là pubblicai un esempio in cui paragonai i risultati ottenuti con due strumenti dei passaggi che supplirono per turno il piccolo meridiano durante la sua attesa.

(<sup>1</sup>) *Sulla determinazione del tempo coll'osservazione dei passaggi delle stelle pel verticale della polare.* Atti dell'Istituto Veneto, vol. VI, ser. V, Venezia, 1880.

In seguito dimostrai nelle Memorie degli Spettroscopisti <sup>(1)</sup> la coincidenza del metodo [AA] con quello dei minimi quadrati *Mmq* <sup>(2)</sup>. Inoltre già fino dal 1898 mi era venuto in mente <sup>(3)</sup> di riguardare gli scarti *v* che si ottengono dalle equazioni di condizione, come dovuti all'andamento *attuale od istantaneo* dell'orologio (supposta l'ascensione retta delle stelle sicura entro 0<sup>s</sup>.01), e l'esposizione nel mio modo di vedere esemplificato con determinazioni di tempo occorse in misure di gravità relativa, fu esposto in appendice al fasc. 10 di Arcetri. Oggi questa veduta acquista anco più valore di fronte al perfezionamento con cui si ottiene il dato di partenza *t*, come si vedrà più avanti. Per intanto dirò che del metodo [AA] e di questa veduta si impadronì il prof. Viaro, il quale ne fece buon uso nel 1900 in occasione di misure di longitudine e gravità in Arcetri da parte dell'Istituto geografico militare (come si pubblicò nel fasc. 13), ed ora ne fa uso continuo nelle determinazioni correnti di tempo od in quelle necessarie ai suoi lavori di posizione di stelle.

Tutto quanto ho fin qui detto non avrebbe scopo di esser ricordato se non venisse a collegarsi coll'esistenza di due fatti recenti troppo intimamente connessi col problema mio favorito perchè io ne possa tacere specialmente lusingandomi che parlandone si possa far cosa utile,

Il primo fatto si è l'applicazione del micrometro *registratore* <sup>(4)</sup> al Piccolo Meridiano, il secondo la trattazione generale teorica del metodo [AA] per qualsiasi numero di incognite fatta dal prof. Viaro. Egli scrisse per l'uno e per l'altra due Memorie intitolate:

I. *Il micrometro autoregistratore del Piccolo Meridiano di Arcetri.* Mem. degli Spettroscopisti, vol. XXXIX, anno 1910.

II. *Sopra un procedimento che può in qualche caso venire utilizzato nella trattazione coi minimi quadrati di una serie di equazioni di condizione.* Riv. di fisica, mat., e Sc. nat. di Pavia, 1910, anno XI.

Indicherò più avanti questa seconda Memoria brevemente con VII quando avrò bisogno di citare le formole che fanno al caso di questa mia trattazione. E quanto alla I non ho altro da aggiungere oltre al titolo, se non l'augurio che possa esser letta dai giovani astronomi e li invaghisca ad attivare questo mezzo per registrare i passaggi sulla striscia cronografica siccome quello che rappresenta un significativo progresso sui vecchi metodi dell'orecchio e del tasto a mano.

<sup>(1)</sup> Vol. XXXIII, anno 1904. Il titolo della Nota si troverà dato più avanti nell'Appendice.

<sup>(2)</sup> La coincidenza esistendo, diventa il metodo [AA] un abbreviato dell'altro: noi lo diciamo delle *Residue*, cioè il metodo dei *Mmq* applicato alle equazioni residue.

<sup>(3)</sup> Cfr. Lorenzoni, *Differenze di longitudine fra Roma, Padova ed Arcetri*.

<sup>(4)</sup> Recentemente, noi ad Arcetri, abbiamo convenuto di chiamarlo così anzichè *autoregistratore*.



Ciò posto venne a me in mente siccome cosa utile e meritevole di esser resa di pubblica ragione quella di esporre le ultime nostre conclusioni fatte in Arcetri, intorno al problema della determinazione di tempo coi passaggi meridiani, illustrandole con un esempio esauriente istituito a bella posta dal prof. Viaro al Piccolo Meridiano, ora provvisto del micrometro registratore.

Assumiamo l'equazione di condizione già prima veduta, e scritta così:

$$(1) \quad \Delta t + az = AR - t$$

e ricorderemo che:

$\Delta t$ , prima incognita, è la correzione dell'orologio siderale;

$z$ , seconda incognita, è l'azimut instrumentale;

$a$ , è il coefficiente della formola di Mayer  $\frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta}$ ;

$t$ , è il tempo del passaggio della stella pel cerchio massimo instrumentale verticale; cioè il medio di parecchi doppi passaggi registrati dal micrometro sulla striscia cronografica nelle due posizioni diretta ed invertita dello strumento; inoltre tale medio s'intende corretto dell'inclinazione  $i$  fornita dalla livella che sta sempre appesa e che s'inverte ad un tempo coll'asse di rotazione;

$AR$ , è l'asc. retta apparente, corretta dell'aberrazione diurna.

Da una serie  $n$  di equazioni della forma (1) avremo l'equazione media,

$$(2) \quad \Delta t + \frac{[a]}{n} z = \frac{[AR - t]}{n}$$

dove le parentesi quadre indicano come il solito, una somma; la somma degli  $n$  coefficienti di  $z$  oppure degli  $n$  termini noti. Sottraendo la (2) da tutte le  $n$  equazioni (1) ne ricaveremo altrettante che possiamo rappresentare con questa:

$$(3) \quad az = \lambda$$

in cui si trova eliminata la  $\Delta t$ , ed  $a$  e  $\lambda$  rappresentano le differenze tra i singoli valori di  $a$  e di  $AR - t$  dal rispettivo medio, e sono quindi piccole quantità che si prestano ad un calcolo rapidissimo (1). Infatti dalle  $n$  equa-

(1) Se nell'equazione (2) risultasse per caso  $[a] = 0$  allora si avrebbe subito il valore di  $\Delta t$ , eguale al medio

$$\frac{[AR - t]}{n}$$

e questo valore introdotto nella (1) darebbe:

$$az = \lambda$$

così che l'equazione normale corrispondente risulterebbe eguale a:

$$[aa]z = [a\lambda].$$

zioni (3) avremo facilmente la normale,

$$[\alpha\alpha]z = [\alpha\lambda]$$

operando con tavole di moltiplicazione a due fattori <sup>(1)</sup> poscia colle medesime, od in altri modi semplicissimi, si ricaverà,

$$(4) \quad z = \frac{[\alpha\lambda]}{[\alpha\alpha]},$$

e diremo allora che l'azimut si ha prontamente dal rapporto fra due somme, una di prodotti, l'altra di quadrati, ambedue di piccoli numeri a due cifre decimali.

Trovato  $z$  l'equazione media (2) darà subito mediante un piccolo prodotto ed una sottrazione, il  $\Delta t$ , che essendo allora ed in tal guisa un valore completamente determinato lo indichiamo con  $\Delta t_m$ .

Giunti a questo punto viene in campo la Memoria VII colla quale possiamo aggiungere alle formole (4) e (2), che danno  $z$  e  $\Delta t$ , quelle che danno i loro pesi  $Pz$  e  $P\Delta t_m$ . Trascriviamo dunque da pag. 489 di VII le formole che seguono, e che sono le reciproche dei pesi,

$$Q_{11} = \frac{1}{[\alpha\alpha]} \quad Q_{00} = \frac{1}{n} + \frac{[a]^2}{n^2[\alpha\alpha]}.$$

Ora essendo che  $\alpha$  ed  $n$  hanno lo stesso significato tanto in VII quanto qui da noi, potremo scrivere,

$$(5) \quad Pz = [\alpha\alpha] \\ \frac{1}{P\Delta t_m} = \frac{1}{n} + \frac{[a]^2}{n^2 Pz}$$

e ponendo  $\frac{[a]^2}{n Pz} = k^2$ , similmente come in VII, scriveremo,

$$(6) \quad P\Delta t_m = \frac{n}{1 + k^2}.$$

Sopra questi pesi possiamo argomentare:

1°) Che l'azimut sarà sempre bene determinato quando i coefficienti  $\alpha$  abbiano valori sensibili e differenti tra loro affinchè le differenze  $\alpha$  che risultano dal paragone col medio  $\frac{[a]}{n}$  sieno pur esse sensibili e dieno un buon numero per  $[\alpha\alpha]$ ; a prescindere però dalle stelle troppo boreali di cui diremo subito.

2°) Che il  $\Delta t_m$  sarà tanto meglio determinato quanto maggiore sarà il numero  $n$  delle stelle osservate. Siccome poi  $k^2$  è una quantità essenzial-

<sup>(1)</sup> Di tali tavole feci io pure una pubblicazione per questo scopo nel 1897 qui a Firenze nella tipografia Carnesecchi e figli, intitolandola: *Tavole di moltiplicazione per fattori di una e due cifre ed indicazione dei quadrati dei fattori in cima alla pagina.*



mente positiva, si vede che il peso di  $\Delta t_m$  si accosta tanto più al numero delle stelle osservate quanto più piccolo è  $k^2$ . Sulla sua piccolezza parla di per sé la frazione che lo esprime, ma noteremo che in essa a denominatore si trova il  $Pz$ , laonde abbiamo di conseguenza che il maggior peso di  $z$  torna anche a beneficio del maggior peso di  $\Delta t_m$ .

Non è poi da credere come vantaggiosa l'inclusione, nelle osservazioni, di stelle *molto boreali* a motivo del loro grande e negativo coefficiente  $\alpha$  perchè se per esso  $Pz$  sarà un gran numero, d'altra parte avremo scapito in  $AR - t$  perchè le stelle *molto boreali* non possono offrire dei  $t$  omogenei con quelli delle altre stelle e massimamente con quelle più veloci come sono le equatoriali. Quindi se una polare può convenire per una buona determinazione di  $z$  e  $\Delta t$  con una sola combinazione di due equazioni fra essa ed una oraria non conviene più quando le equazioni sono molte e si vogliono trattare col metodo esposto perchè l'uso suo implica che le equazioni sieno tutte abbastanza omogenee (<sup>1</sup>).

Intorno al zenit i valori di  $\alpha$  sono simmetrici, non così quelli di  $t$  per riguardo alle velocità delle stelle, ne viene che le equazioni omogenee si avrebbero, alle nostre latitudini, con stelle aventi una declinazione  $\frac{1}{2}(0^\circ + 45^\circ)$ , ma d'altra parte abbiamo veduto che gli  $\alpha$  devono essere fra loro diversi, perciò diremo che evitando le stelle molto boreali, polarissime, e per ovvie ragioni anche quelle molto australi, avremo libera scelta fra quelle comprese in una zona limitata, all'incirca, dai paralleli  $-10^\circ$  e  $+60^\circ$ , nè si temerà di sconfinarla di qualche grado come mostra anche l'esempio qui esibito, in cui la stella più boreale è  $\delta$  *Draconis* con  $\delta = +67^\circ.5$  e la più australe  $v$  *Aquarii* con  $\delta = -11^\circ.7$ .

Nelle effemeridi di Berlino si vedrà che malgrado la restrizione fatta le stelle si succedono abbastanza rapidamente; come del resto prova l'unito esempio dove troveremo osservate 8 stelle in  $\frac{3}{4}$  d'ora, il che dà un intervallo medio di circa  $6^m$  fra l'una e l'altra, e si capisce come nei fratempi si sarebbero potute interpolare stelle incognite di cui occorrono le coordinate, che è quanto poi fa il prof. Viaro col Piccolo Meridiano.

(<sup>2</sup>) Chiamando  $v$  la velocità di una stella oraria equatoriale, sarà  $v \cos \delta$  quella della polare, e chiamando ancora  $\sigma$  uno spazio qualsivoglia del campo del cannocchiale, avremo che il tempo  $t_0$  sul quale s'indugia l'oraria sarà espresso da  $\sigma/v$ , e quello  $t_p$  della polare da  $\sigma/v \cos \delta$ ; dunque potremo dire  $t_0:t_p = 1:\sec \delta$ .

Ora agli  $88^\circ.51'$  di declinazione che competono attualmente ad  $\alpha$  *Ursae minoris* corrisponde una  $\sec \delta = 49$ , quindi su di uno spazio  $\sigma = 1''.5$  come può essere la grossezza di un filo, la polare propriamente detta indugia  $4^s.9$  mentre l'equatoriale indugierebbe  $1^s.5/15 = 0^s.1$ . L'errore unitario di un solo doppio passaggio registrato col tasto, o col micrometro, è per verità minore di  $0^s.1$  (v. la Memoria I di Viaro) ma la relazione fra i due numeri  $4.9$  e  $0.1$ , che è poi quella di  $\sec \delta = 49$ , rimane la stessa; e tanto basta a provare la non omogeneità fra i  $t$  delle orarie e quelli delle stelle troppo boreali; che potremo chiamare polarissime.

Prima di passare all'esempio devo ancora dire quanto segue circa il peso delle incognite. Il peso di per se stesso è un rapporto, o numero astratto che non può avere significazione se noi ignorassimo i termini che lo costituiscono, cioè l'error medio unitario  $\epsilon_1$  (o probabile; ma noi ora non facciamo sempre uso del medio, per maggior speditezza) e l'error medio  $\epsilon$  del risultato a cui viene attribuito il peso P. Si sa essere

$$P = \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon^2}$$

e pertanto avendo il peso, e l'errore unitario, saremo in grado di ricavare  $\epsilon$  per avere una giusta e pratica idea della precisione o bontà dei risultati  $\Delta t_m$  e  $z$ . E quanto al primo, che maggiormente ci interessa, possiamo dir subito, ispezionando qui avanti il quadro II, ultima colonna, che i risultati offerti dal prof. Viaro per i tre valori separati di  $\Delta t$  medî di 8 stelle ciascuno ammettono una precisione intorno al centesimo di secondo in tempo.

Resta ora da trovare  $\epsilon_1$  e ciò si farà calcolando i residui  $v$  dalle equazioni (1) introducendovi per le incognite i valori trovati e risultandone

$$v = (AR - t) - (\Delta t_m + az)$$

e così dagli  $n$  valori di  $v$  avremo  $\epsilon_1$  colla ben nota formola

$$(7) \quad \epsilon_1 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}.$$

Quando in una sera si saranno osservate molte stelle distribuite in un intervallo di parecchie ore come è il caso della determinazione di posizione di stelle incognite, od in sostanza dei lavori di cataloghi stellari, oppure di lavori di longitudine o di gravità, si dovranno trattare le  $n$  equazioni di condizione (1) in più gruppi, o più serie, come dir si voglia, per averne altrettanti valori medî di  $\Delta t$  e di  $z$  con cui si potrà anche stabilire la variazione di questi elementi; ossia l'andamento orario dell'orologio ed il comportamento orario dello strumento rispetto all'azimut<sup>(1)</sup>. Il procedimento di calcolo di una tale variazione sarà identico per l'uno e per l'altro elemento e qui basterà considerarne uno, il  $\Delta t$ .

Supponiamo dunque di avere 2, 3, ...,  $s$  determinazioni di  $\Delta t$  fatte in una stessa sera e corrispondenti ai tempi  $T_1 T_2$  ecc. espressi in ore e frazioni decimali di ora; intanto osserveremo che col millesimo di ora si

(1) La variazione dell'azimut è naturalmente cosa diversa da quella congenita dell'orologio, ma del pari come l'inclinazione e la collimazione (quando si calcola), l'azimut per singole determinazioni offrirà sempre valori fra loro diversi, ora nel modo proposto si potrà vedere se la diversità ammette una proporzione col tempo e siccome dovrebbe essere per plausibile ipotesi.



terrà conto del mezzo decimo di minuto che corrisponde a  $8^s$ , poscia potremo stabilire questa nuova equazione di condizione:

$$(8) \quad \Delta t_0 + (T_1 - T_0) y = \Delta t$$

dove  $\Delta t_0$  sarà quel valore che assume  $\Delta t$  al tempo  $T_0$  quando lo si spoglia dell'andamento orario  $y$  moltiplicato per l'intervallo di tempo  $(T_1 - T_0)$ . E così intendendo per gli altri intervalli relativi a  $T_2, T_3$  ecc., avremo in tutto  $s$  equazioni rappresentate dalla (8). Queste  $s$  equazioni sommate ci daranno:

$$(9) \quad s\Delta t_0 + [T - T_0] y = [\Delta t],$$

dove colla parentesi quadra intendiamo indicata, come prima, una somma, e dove si è scritto  $T$  in luogo di  $T_1$  intendendo che al primo competono, nello sviluppo della somma, tutti gli indici da 1 ad  $s$ . Adesso osserviamo che se per  $T_0$  si sceglie il medio dei tempi  $T_1, T_2, \dots$  sarà la somma  $[T - T_0] = 0$  e quindi:

$$(10) \quad \Delta t_0 = \frac{[\Delta t]}{s}$$

cioè  $\Delta t_0$  sarà il medio delle  $s$  determinazioni e corrisponderà al medio dei tempi  $T_0$ . Trovato questo se si ritorna alle equazioni (8) chiamando per brevità gl'intervalli di tempo con  $\tau$ , e le differenze fra i  $\Delta t$  e  $\Delta t_0$  con  $v$  si avrà

$$\tau y = v$$

e dalle  $s$  equazioni simili a questa avremo la normale

$$[\tau \tau] y = [\tau v]$$

da cui

$$(11) \quad y = \frac{[\tau v]}{[\tau \tau]}$$

che sarà la variazione oraria di  $\Delta t_0$  a partire da  $T_0$ ; od altrimenti diremo esser  $y$  l'andamento orario dell'orologio. Applicando ora ad  $y$  e  $\Delta t_0$  le formole (5) e (6) dei pesi colle modificazioni dovute, troveremo:

$$(12) \quad P y = [\tau \tau]$$

poscia

$$P \Delta t_0 = \frac{s}{1 + k^2}$$

ma per essere in questo caso  $[\tau] = 0$  sarà

$$k^2 = \frac{[\tau]^2}{s P y} = 0,$$

e perciò

$$P \Delta t_0 = s.$$

Ne concludiamo che il peso di  $y$  dipende dalla grandezza degli intervalli di tempo  $\tau$  e che il peso di  $\Delta t_0$  dipende dalle serie in cui fu diviso l'intero periodo di osservazione. Ma qui pure oltre al peso occorre l'errore

unitario  $\varepsilon_1$  che poscia diviso per le radici dei pesi darà gli errori  $\varepsilon$  di  $y$  e  $\Delta t_0$  che ci faranno giudicare della bontà di questi risultati. Pertanto si calcoleranno colla formola (8) e coi valori  $\Delta t_0$  ed  $y$  i valori  $\Delta t$  che paragonati con quelli di partenza daranno dei nuovi  $v$  da cui avremo,

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[vv]}{s-2}}.$$

ESEMPIO.

Il prof. Viaro la sera dell'8 settembre 1910, che fu di bel sereno, fece espressamente tre determinazioni di tempo al Piccolo Meridiano di Arcetri, osservando 24 stelle delle effemeridi di Berlino ed adoperando il micrometro registratore. Spogliò poscia 30 doppi passaggi per ogni stella e ne ricavò i  $t$ , che corretti per l'inclinazione e per l'ampiezza del contatto, divise in tre gruppi, ciascuno dei quali conta otto stelle. Composte le equazioni, le calcolò e mi fornì i materiali per i due quadri seguenti:

QUADRO I.

| Stella . AR. 8 settembre 1910 |                  | EQUAZIONI DI CONDIZIONE  | $\Delta t$     |
|-------------------------------|------------------|--------------------------|----------------|
|                               | <sup>h m s</sup> |                          | <sup>m s</sup> |
| $\eta$ Serp. . . . .          | 18 16 41         | $\Delta t + 0.73 z = -2$ | 27.462         |
| 109 Herc. . . . .             | 18 19 53         | + 0.40                   | 27.684         |
| $\delta$ Drac. . . . .        | 18 22 37         | - 0.50                   | 27.082         |
| $\alpha$ Lyrae . . . . .      | 18 33 55         | + 0.11                   | 27.804         |
| 110 Herc. . . . .             | 18 41 49         | + 0.42                   | 27.637         |
| $\beta$ Lyrae . . . . .       | 18 46 47         | + 0.22                   | 27.726         |
| R Lyrae . . . . .             | 18 52 37         | 0.00                     | 27.819         |
| $\zeta$ Aquil. . . . .        | 19 1 18          | + 0.51                   | 27.600         |
|                               | 18 36 57         |                          | - 2 27.841     |
| $\delta$ Drac. . . . .        | 19 12 34         | $\Delta t - 1.05 z = -2$ | 28.296         |
| $\delta$ Aquil. . . . .       | 19 21 0          | + 0.66                   | 27.545         |
| $\beta$ Cygni . . . . .       | 19 27 7          | + 0.31                   | 27.674         |
| $\gamma$ Cygni . . . . .      | 19 34 3          | - 0.17                   | 27.929         |
| $\gamma$ Aquil. . . . .       | 19 42 1          | + 0.56                   | 27.525         |
| $\alpha$ Aquil. . . . .       | 19 46 26         | + 0.58                   | 27.532         |
| $\gamma$ Sagit. . . . .       | 19 54 47         | + 0.44                   | 27.630         |
| $\delta$ Aquil. . . . .       | 20 6 42          | + 0.71                   | 27 513         |
|                               | 19 38 5          |                          | - 2 27.823     |
| $\gamma$ Cygni . . . . .      | 20 19 2          | $\Delta t + 0.09 z = -2$ | 27.798         |
| $\delta$ Cep. . . . .         | 20 28 7          | - 0.71                   | 28.059         |
| $\beta$ Delph. . . . .        | 20 33 22         | + 0.51                   | 27.570         |
| $\alpha$ Cygni . . . . .      | 20 38 24         | - 0.03                   | 27.814         |
| $\varepsilon$ Aqu. . . . .    | 20 42 51         | + 0.82                   | 27.498         |
| 32 Vulp. . . . .              | 20 50 46         | + 0.31                   | 27.712         |
| $\nu$ Cygni . . . . .         | 20 53 51         | + 0.07                   | 27.809         |
| $\nu$ Aqu. . . . .            | 21 4 44          | + 0.84                   | 27.457         |
|                               | 20 41 23         |                          | - 2 27.708     |



QUADRO II.

| T                                                  | $\varepsilon_1$ | Pz    | PΔt   | z                   | Δt                      |
|----------------------------------------------------|-----------------|-------|-------|---------------------|-------------------------|
| <sup>h</sup> <sup>m</sup> <sup>s</sup><br>18 36 57 | $\pm 0.022$     | 0.994 | 5.520 | $+ 0.485 \pm 0.022$ | $- 2\ 27.841 \pm 0.009$ |
| 19 38 5                                            | 0.026           | 2.491 | 6.618 | 0.460 0.017         | 823 0.010               |
| 20 41 23                                           | 0.029           | 1.801 | 6.397 | 0.340 0.021         | 807 0.011               |
| 19 38 48                                           |                 |       |       |                     | $- 2\ 27.8237$          |

Ispezionando i risultati offerti per Δt dal quadro II, ultima colonna, vedremo che oltre all'essere ciascuna delle tre determinazioni sicura entro il centesimo di secondo i tre valori vanno diminuendo regolarmente col crescere del tempo. Per tanto non è fuor di proposito calcolare sopra di essi l'andamento  $y$ .

Facendo la differenza fra i tre singoli valori di T e di Δt dal loro medio che sta scritto di sotto, avremo:

| $\tau$                                             | $v$      |
|----------------------------------------------------|----------|
| <sup>h</sup> <sup>m</sup> <sup>s</sup><br>— 1 1 51 | — 0.0173 |
| — 0 0 43                                           | + 0.0007 |
| + 1 2 35                                           | + 0.0167 |

da cui le equazioni di condizione:

$$\begin{aligned}
 -1^h.031y &= -0^s.0173 \\
 -0.012 &+ 0.0007 \\
 +1.043 &+ 0.0167.
 \end{aligned}$$

Per formare agevolmente l'equazione normale che deve darci  $y$  riduciamo i due membri a numeri interi moltiplicandoli per 10 mila, ma poi prendiamo anche la  $y$  dieci volte più grande per ridurci a quattro cifre significative soltanto, e scriviamo dunque le equazioni come segue:

$$\begin{aligned}
 -1031(10y) &= -173 \\
 -12 &+ 7 \\
 +1043 &+ 167
 \end{aligned}$$

Adesso la formazione della normale è ridotta a poca cosa, impiegando le tavole di moltiplicazione a fattori di quattro cifre di Peters (\*). Infatti avremo:

$$2150954(10y) = 352460$$

da cui

$$10y = \frac{352460}{2150954}.$$

Per eseguire la divisione basta considerare il divisore ridotto alle quattro prime cifre 2151 e la pagina 045 e la colonna 2 delle suddette tavole di Peters ci mostrerà i prodotti che colle loro cifre più si accostano al dividendo, e ne ricaveremo con due tratti di penna,

$$10y = 0.1639$$

da cui

$$y = + 0^s.01639.$$

Se ora con  $\Delta t_0$  ed  $y$  si calcolano i  $\Delta t$  avremo quanto segue:

$$\begin{array}{rcl} - 2^m 27^s.8237 - 1^h.031y & = & - 2^m 27^s.8406 \\ & & - 0.012 \qquad 27.8239 \\ & & + 1.043 \qquad 27.8066 \end{array}$$

e dal paragone di questa rappresentazione dei  $\Delta t$  con quelli del quadro II ne vengono questi nuovi  $v$

$$\begin{array}{l} - 0^s.0004 \\ + 0.0009 \\ - 0.0004 \end{array}$$

che ci forniscono l'errore medio unitario \*

$$\varepsilon_1 = \pm 0^s.0011.$$

Quanto ai pesi è subito visto che quello di  $y$  è il due che proviene da  $[\tau\tau] = 1^h + 1^h$  e quello di  $\Delta t_0$  è il tre, laonde i valori di  $\varepsilon$  corrispondenti a quelle due quantità sono rispettivamente  $\pm 0^s.0008$   $\pm 0^s.0006$  ed indicano una precisione entro il millesimo di secondo, cioè entro la terza decimale; però in  $y$  bisognerà sempre computare la quarta per poter assicurare la terza nel prodotto  $\tau y$ .

Supposto dunque che la serata dell'8 settembre 1910 consacrata dal prof. Viaro a questo esempio, fosse stata impiegata anche per altri scopi,

(\*) Dott. J. Peters, *Neue Rechentafeln für multiplikation und division mit allen ein-bis vierstelligen Zahlen*. Berlin, Druck und Verlag von Georg Reimer, 1909.



siccome quelli dianzi avvertiti, formazione di cataloghi, differenze di longitudine o di gravità, il risultato finale a cui siamo giunti, e che qui trascrivo:

$$\Delta t_0 = -2^m 27^s.8237 + 0.0164 \tau$$

sarebbe stato capace di dare la correzione dell'orologio, che fu il pendolo normale, per *qualsiasi istante* prima e dopo il tempo siderale  $T_0 = 19^h.38^m.48^s$  ed in tutto l'intervallo di  $2^h 48^m$  in cui durarono le osservazioni.

Siccome poi il valore  $-2^m 27^s.8237$  ha il suo errore  $\varepsilon_t$  ed  $y$  ha il suo  $\varepsilon_y$  sarà per ogni altro valore di  $\Delta t$

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_t^2 + \varepsilon_y^2}$$

Supposto  $\tau = 1^h$  e tenendo conto dell'ordine delle decimali avremo

$$\varepsilon = \sqrt{.64 + .36} = \sqrt{1.00} \text{ dell' } 8^a \text{ cifra}$$

quindi

$$\varepsilon = \pm 10 \text{ della } 4^a \text{ cifra,}$$

ovvero

$$\varepsilon = \pm 0^s.0010,$$

cioè il  $\Delta t$  interpolato per  $1^h$  sarà esatto entro il millesimo di secondo ciò che prima del micrometro registratore non era.

Naturalmente esistendo uno di quegli scopi prefati, l'intervallo sarebbe stato certamente più lungo, ma con ciò, *ceteris paribus*, nulla si sarebbe perduto; anzi  $y$  avrebbe guadagnato in peso.

#### APPENDICE.

Nella Memoria VII si trovano nelle due ultime righe di pag. 499 <sup>(1)</sup> anche le formole per determinare i pesi delle costanti delle lastre fotografiche dei cataloghi stellari fotografici, formole le quali pure possiamo vedere applicate come ora dirò. Ricordo intanto che intorno al modo di ricavare i valori più probabili di dette costanti con un procedimento analogo a quello relativo al  $\Delta t$  e  $z$  io scrissi nel vol. XXXIII degli Spettroscopisti la Nota intitolata: *Sulla trattazione coi minimi quadrati di due casi speciali di equazioni di condizione*, casi che sono appunto la determinazione del tempo, e la determinazione delle quattro costanti delle lastre fotografiche di Catania. Or bene, avendo io chiamate quelle costanti AA'BC e notando che le due prime si riferiscono alle coordinate del punto di origine delle misure, e le due ultime all'orientamento ed alla scala, venni a trovare, applicando le

(<sup>1</sup>) § 7, Caso III di  $2n$  equazioni fra le incognite  $x_0, x'_0, x_1, x_2$ .

formole VII all'esempio dato per la lastra n. 1668, le relazioni di peso che darò subito dopo questi valori,

$$A = - 0.47096$$

$$A' = + 0.12092$$

$$B = - 0.00076$$

$$C = + 0.00825$$

trascritti dalla trattazione suddetta.

Il peso delle due prime è unico ed eguale a circa il numero delle stelle di riferimento, in tutte 14; il peso delle BC è pure unico ed eguale a 100 volte la somma,

$$[aa] = [bb] = 376,3364.$$

Il fattore 100 entra in giuoco perchè nella mia trattazione i coefficienti delle B e C sono stati *a priori*, per comodità e speditezza di calcolo, divisi per 10 senza scapito di esattezza, come è confermato ragionando sui due numeri 14 e 37634. La loro grande disparità dipende dall'ordine diverso dei due gruppi di costanti; e mentre le due prime A A' esigono il maggior numero possibile di stelle di riferimento, al di là anche di 14, le altre due BC restano più che bene determinate limitando *a priori* nelle equazioni di condizione il numero delle decimali. E con ciò il calcolo col metodo dei *Mmq* applicato alle Residue <sup>(1)</sup> diventa assai sbrigativo ed assai sicuro; ed oggi, dopo questa indagine, dobbiamo dire che esso supera qualsiasi altro procedimento perchè escludendo ogni arbitrarietà offre, senza gran fatica, e senza spreco di tempo, i più probabili valori delle costanti.

<sup>(1)</sup> Il metodo delle Residue viene ora impiegato a Catania. Cfr. *Catalogo Astrofotografico*, vol. VI. parte I, anno 1909. Indipendentemente da me anche Trépied si accorse dell'opportunità delle Residue. Cfr. *Catalogue Photographique d'Alger. Introduction*, pag. LIII. *Résolution des équation*.

A questo punto mi sia permesso di dire un'altra cosa d'interesse dei cataloghi stellari-fotografici. ed è questa. Che il sig. Lagarde, astronomo di Parigi, fece opera utilissima divulgando una sua preziosa pubblicazione unificante i modi di servirsi di detti cataloghi. Essa insegna ad avere presto e bene, senza penose indagini le posizioni delle stelle, malgrado le diversità con cui detti cataloghi si preparano. Il titolo della pubblicazione, la quale fu recentemente a noi regalata dal chiarissimo Autore in tre esemplari, è il seguente: *Formules et tables pour faciliter l'emploi des catalogues photographiques en coordonnées rectilignes*.



**Matematica.** — *Sul gradiente di una omografia vettoriale.*

Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella teoria delle omografie vettoriali — esposta dai prof. C. Burali-Forti e R. Marcolongo nell'ottimo volumetto: *Omografie vettoriali con applicazioni* ecc. (G. B. Petrini, Torino, a. 1909) <sup>(1)</sup> — è molto importante, soprattutto dal punto di vista delle applicazioni, la considerazione di un certo vettore, dipendente unicamente da una data omografia vettoriale, e che dicesi *gradiente* dell'omografia considerata <sup>(2)</sup>.

Tale vettore è stato introdotto, dai predetti autori, mediante il riferimento ad una terna di vettori unitari ortogonali; si dimostra però che esso non cambia, comunque varii la terna suddetta, in guisa che il gradiente di una omografia è funzione soltanto dell'omografia stessa.

Si capisce quindi come dovesse esser possibile (e desiderabile) — benchè il modo di giungervi fosse tutt'altro che ovvio <sup>(3)</sup> — di definire il gradiente di una omografia indipendentemente da ogni terna di riferimento; e ciò appunto mi è riuscito di ottenere, in modo assai semplice, per mezzo della definizione (1), o della equivalente (1'). In conseguenza della nuova definizione, vengono semplificate le dimostrazioni di varie formule, relative al gradiente di particolari omografie; e tali dimostrazioni espongo pure in questa breve Nota.

Per ultimo dimostro una nuova formula relativa alle omografie vettoriali, dalla quale si può subito dedurre la dimostrazione di una identità molto importante, che lega le potenze di un'omografia e i suoi invarianti. Tale identità è dimostrata, nel volumetto sopra citato, dapprima nel caso in cui l'omografia ha tre direzioni unite distinte (e allora la dimostrazione è immediata), poi è accennata la dimostrazione nel caso di un'omografia qualsiasi; questa dimostrazione conduce però a calcoli alquanto complicati <sup>(4)</sup>; quella che espongo qui, mi pare invece semplicissima.

Dall'identità in questione si deduce poi, fra altro, che gli invarianti del prodotto di più omografie sono indipendenti dall'ordine dei fattori.

(<sup>1</sup>) Nelle citazioni, indicherò questo libro semplicemente con (*O. v.*).

(<sup>2</sup>) Questo vettore venne considerato, la prima volta, dal prof. C. Burali-Forti nella Nota: *Sopra alcune operazioni proiettive applicabili nella meccanica*, pag. 12 (in nota). Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLII, a. 1906-07.

(<sup>3</sup>) Infatti a pag. 51 del citato libro, dopo stabilita la formula:  $(\text{grad } m) \times dP = dm$ , ove  $m$  è un numero funzione del punto  $P$ , gli autori dicono che essa « pare non abbia la sua corrispondente per una omografia qualunque che non sia un numero ».

(<sup>4</sup>) Tanto è vero che gli autori soggiungono (pag. 10) che « sarebbe interessante trovare una dimostrazione diretta più semplice di quella che ora abbiamo accennata ».

1. Sia  $\alpha$  un'omografia vettoriale, funzione del punto  $P$  variabile in un campo a tre dimensioni; con la notazione  $\text{grad}_P \alpha$ , o, quando non vi possa esser luogo ad equivoci, semplicemente  $\text{grad } \alpha$ , che si legge « gradiente (rispetto a  $P$ ) di  $\alpha$  », si indica il vettore, funzione di  $\alpha$  e di  $P$  soltanto, tale che

$$(1) \quad (\text{grad } \alpha) \times dP = I_1 \frac{d(K\alpha dP)}{dP},$$

qualunque sia lo spostamento (vettore)  $dP$  di  $P$ .

Si riconosce subito che, se il vettore  $\text{grad } \alpha$  esiste, esso è unico. Infatti se  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  sono due vettori funzioni di  $\alpha$  e di  $P$  soltanto, tali che

$$\mathbf{x} \times dP = \mathbf{y} \times dP = I_1 \frac{d(K\alpha dP)}{dP},$$

si ha:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times dP = 0,$$

qualunque sia lo spostamento  $dP$  nel campo considerato, perciò:  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

Se  $\alpha, \beta$  sono omografie funzioni di  $P$ , si ha:

$$(2) \quad \text{grad}(\alpha + \beta) = \text{grad } \alpha + \text{grad } \beta,$$

come si deduce subito dalla (1).

Indicheremo, anche nel seguito, con  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  tre vettori unitari, formanti una terna ortogonale destrorsa. Si ha allora:

$$(3) \quad \text{grad } \alpha = \left( \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{i} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{j} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{k} \right) \mathbf{k}.$$

Infatti, dalla (1), ricordando l'espressione dell'invariante primo di una omografia (*O. v.*, pag. 8, [4]) si ha:

$$(\text{grad } \alpha) \times dP = \mathbf{i} \times \frac{d(K\alpha dP)}{dP} \mathbf{i} + \mathbf{j} \times \frac{d(K\alpha dP)}{dP} \mathbf{j} + \dots,$$

ovvero (*O. v.*, pag. 47, [7], [9]):

$$(\text{grad } \alpha) \times dP = \mathbf{i} \times K \left( \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{i} \right) dP + \mathbf{j} \times K \left( \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{j} \right) dP + \dots,$$

cioè (*O. v.*, pag. 18, [6]):

$$(\text{grad } \alpha) \times dP = dP \times \left[ \left( \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{i} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{j} \right) \mathbf{j} + \dots \right],$$

da cui segue la (3). È precisamente la formula (3) che è stata assunta in *O. v.*, pag. 49, [1], come definizione di  $\text{grad } \alpha$ .



Se  $m$  è un numero funzione di  $P$ , ed  $\mathbf{x}$  è un vettore qualunque, il gradiente di  $m$  ha con  $\frac{dm}{dP}$  la relazione semplice indicata dalla formula:

$$(4) \quad (\text{grad } m) \times \mathbf{x} = \frac{dm}{dP} \mathbf{x},$$

dalla quale, assumendo, in particolare,  $\mathbf{x} = dP$ , risulta:

$$(4') \quad (\text{grad } m) \times dP = dm.$$

La (4) si può dimostrare col procedimento stesso adoperato in *O. v.*, pag. 51. Così pure rimangono immutate le dimostrazioni delle formule [5]-[17] del n. 23 di *O. v.*

2. Ricordando che la divergenza di un vettore  $\mathbf{u}$  funzione di  $P$ , si può definire colla formula (*O. v.*, pag. 56, [2]):

$$(5) \quad \text{div } \mathbf{u} = I_1 \frac{d\mathbf{u}}{dP},$$

si può sostituire alla (1) la seguente definizione:

$$(1') \quad (\text{grad } \alpha) \times dP = \text{div}(K\alpha dP).$$

La rotazione di  $\mathbf{u}$  si può definire così (*O. v.*, pag. 56, [1]):

$$\text{rot } \mathbf{u} = 2V \frac{d\mathbf{u}}{dP},$$

e col procedimento stesso di *O. v.*, pag. 57, si stabiliscono le formule

$$(6) \quad \text{rot}(m\mathbf{u}) = m \text{ rot } \mathbf{u} + (\text{grad } m) \wedge \mathbf{u}$$

$$(7) \quad \text{div}(m\mathbf{u}) = m \text{ div } \mathbf{u} + (\text{grad } m) \times \mathbf{u}$$

$$(8) \quad \text{div}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{v},$$

ove  $\mathbf{v}$  è un vettore funzione di  $P$ .

Ciò premesso, se  $\mathbf{a}$  è un vettore costante, è facile dimostrare che:

$$(9) \quad (\text{grad } \alpha) \times \mathbf{a} = \text{div}(K\alpha \mathbf{a})$$

$$(10) \quad \text{grad } \alpha = \mathbf{i} \text{ div}(K\alpha \mathbf{i}) + \mathbf{j} \text{ div}(K\alpha \mathbf{j}) + \mathbf{k} \text{ div}(K\alpha \mathbf{k}), \quad (\text{O. v.}, \text{ pag. 58, [14]})$$

$$(11) \quad \text{grad}(m\alpha) = m \text{ grad } \alpha + \alpha (\text{grad } m), \quad (\text{O. v.}, \text{ pag. 50, [2]})$$

$$(12) \quad \text{grad}(\mathbf{u} \wedge) = -\text{rot } \mathbf{u}, \quad (\text{O. v.}, \text{ pag. 58, [13]})$$

$$(13) \quad \text{grad}\left(K \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) = \text{grad div } \mathbf{u}, \quad (\text{O. v.}, \text{ pag. 59, [16]})$$

$$(14) \quad \text{grad} \frac{d\mathbf{u}}{dP} = \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u}, \quad (\text{O. v.}, \text{ pag. 59, [15]})$$

$$(15) \operatorname{grad} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{u} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u},$$

$$(16) \operatorname{div}(\alpha \mathbf{u}) = I_1 \left( \alpha \frac{d\mathbf{u}}{dP} \right) + (\operatorname{grad} K\alpha) \times \mathbf{u}. \quad (O. v., \text{ pag. } 57, [10]).$$

Dim. (9). — Assumendo lo spostamento  $dP$  parallelo al vettore  $\mathbf{a}$ , che, evidentemente, è lecito supporre unitario, si ha:  $dP = (\mathbf{a} \times dP) \mathbf{a}$ , onde dalle (1'), (7):

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times dP) (\operatorname{grad} \alpha) \times \mathbf{a} &= \operatorname{div} [(\mathbf{a} \times dP) K\alpha \mathbf{a}] \\ &= (\mathbf{a} \times dP) \operatorname{div} (K\alpha \mathbf{a}) + [\operatorname{grad} (\mathbf{a} \times dP)] \times K\alpha \mathbf{a}, \end{aligned}$$

e poichè dalla (4') si riconosce subito che  $\operatorname{grad} (\mathbf{a} \times dP) = 0$ , si ha la (9).

Dim. (10). — Poichè:

$$\operatorname{grad} \alpha = (\mathbf{i} \times \operatorname{grad} \alpha) \mathbf{i} + (\mathbf{j} \times \operatorname{grad} \alpha) \mathbf{j} + (\mathbf{k} \times \operatorname{grad} \alpha) \mathbf{k}.$$

dalla (9) segue senz'altro la (10).

Dim. (11). — Dalle (1'), (7) si deduce:

$$\begin{aligned} [\operatorname{grad} (m\alpha)] \times dP &= \operatorname{div} (mK\alpha dP) = m \operatorname{div} (K\alpha dP) + (\operatorname{grad} m) \times K\alpha dP \\ &= m (\operatorname{grad} \alpha) \times dP + \alpha (\operatorname{grad} m) \times dP, \end{aligned}$$

perciò se ne trae la (11).

Dim. (12). — Dalle (1'), (8) risulta:

$$[\operatorname{grad} (\mathbf{u} \wedge)] \times dP = - \operatorname{div} (\mathbf{u} \wedge dP) = - (\operatorname{rot} \mathbf{u}) \times dP + \mathbf{u} \times \operatorname{rot} dP,$$

ma si vede subito che:  $\operatorname{rot} dP = 0$ , onde si ottiene la (12).

Dim. (13). — Dalle (1'), (4') si ha:

$$\left[ \operatorname{grad} \left( K \frac{d\mathbf{u}}{dP} \right) \right] \times dP = \operatorname{div} \left( \frac{d\mathbf{u}}{dP} dP \right) = d(\operatorname{div} \mathbf{u}) = (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}) \times dP.$$

la quale dimostra la (13).

Dim. (14). — Si ha anzitutto (O. v., pag. 56, [3]):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} = K \frac{d\mathbf{u}}{dP} + (\operatorname{rot} \mathbf{u}) \wedge,$$

perciò prendendo il gradiente di ambi i membri, e ricordando le (2), (12), (13) si ha la (14).

Dim. (15). — Dalle proprietà dell'omografia  $H$  (O. v. pag. 20, [1], [2]) si trae:

$$\begin{aligned} [\operatorname{grad} H(\mathbf{u}, \mathbf{v})] \times dP &= \operatorname{div} [KH(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \times dP] = \operatorname{div} [(\mathbf{v} \times dP) \mathbf{u}] \\ &= [\operatorname{grad} (\mathbf{v} \times dP)] \times \mathbf{u} + (\mathbf{v} \times dP) \operatorname{div} \mathbf{u}, \end{aligned}$$



e poichè il primo termine dell'ultimo membro può scriversi (*O. v.*, pag. 51, [5]):

$$\left( K \frac{d\mathbf{v}}{dP} dP \right) \times \mathbf{u}, \text{ cioè } \left( \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{u} \right) \times dP,$$

si conclude la (15).

Dim. (16). — Dalla (5) e dalle formule [7], [9'], pag. 47 di *O. v.*, si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\alpha \mathbf{u}) &= \mathbf{i} \times \frac{d(\alpha \mathbf{u})}{dP} \mathbf{i} + \mathbf{j} \times \frac{d(\alpha \mathbf{u})}{dP} \mathbf{j} + \mathbf{k} \times \frac{d(\alpha \mathbf{u})}{dP} \mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} \times \left( \alpha \frac{d\mathbf{u}}{dP} \right) \mathbf{i} + \mathbf{j} \times \left( \alpha \frac{d\mathbf{u}}{dP} \right) \mathbf{j} + \mathbf{k} \times \left( \alpha \frac{d\mathbf{u}}{dP} \right) \mathbf{k} + \mathbf{i} \times \left( \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{i} \right) \mathbf{u} + \dots \\ &= \mathbf{I}_1 \left( \alpha \frac{d\mathbf{u}}{dP} \right) + \mathbf{u} \times \left[ \left( \frac{dK\alpha}{dP} \mathbf{i} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{dK\alpha}{dP} \mathbf{j} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{dK\alpha}{dP} \mathbf{k} \right) \mathbf{k} \right], \end{aligned}$$

la quale, in virtù della (3), non differisce dalla (16).

Un'altra proprietà, che è spesso molto utile, è la seguente. Se  $u, v, \dots$  sono numeri funzioni di  $P$ , ed  $\alpha(u, v, \dots)$  è un'omografia funzione di  $u, v, \dots$  (e quindi di  $P$ ), si ha:

$$(17) \quad \operatorname{grad}_P \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial u} \operatorname{grad}_P u + \frac{\partial \alpha}{\partial v} \operatorname{grad}_P v + \dots$$

Infatti, dalla (3) si deduce:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \alpha &= \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial u} \left( \frac{du}{dP} \mathbf{i} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial v} \left( \frac{dv}{dP} \mathbf{i} \right) + \dots \right] \mathbf{i} + \\ &\quad + \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial u} \left( \frac{du}{dP} \mathbf{j} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial v} \left( \frac{dv}{dP} \mathbf{j} \right) + \dots \right] \mathbf{j} + \dots \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial u} \left[ \left( \frac{du}{dP} \mathbf{i} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{du}{dP} \mathbf{j} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{du}{dP} \mathbf{k} \right) \mathbf{k} \right] + \frac{\partial \alpha}{\partial v} \left[ \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

e per la (3) stessa, segue la (17).

3. Esponiamo ora una dimostrazione semplicissima di una notevole identità che lega le potenze di un'omografia e i suoi invarianti (*O. v.*, pag. 10, [1]).

Convien anzitutto premettere una formula assai utile. Se  $\alpha$  è un'omografia vettoriale, ed  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  sono vettori qualunque si ha:

$$(18) \quad (\alpha \mathbf{x}) \wedge (\alpha \mathbf{y}) = (\mathbf{I}_2 \alpha) \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} - K\alpha(\mathbf{x} \wedge \alpha \mathbf{y} - \mathbf{y} \wedge \alpha \mathbf{x}).$$

Infatti, se  $\mathbf{z}$  è un vettore qualunque, non complanare con  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , si ha dall'espressione dell'invariante secondo di un'omografia (*O. v.*, pag. 7, [3]):

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_2 \alpha)(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \times \mathbf{z} &= (\mathbf{x} \wedge \alpha \mathbf{y}) \times \alpha \mathbf{z} - (\mathbf{y} \wedge \alpha \mathbf{x}) \times \alpha \mathbf{z} + (\alpha \mathbf{x} \wedge \alpha \mathbf{y}) \times \mathbf{z} \\ &= K\alpha(\mathbf{x} \wedge \alpha \mathbf{y}) \times \mathbf{z} - K\alpha(\mathbf{y} \wedge \alpha \mathbf{x}) \times \mathbf{z} + (\alpha \mathbf{x} \wedge \alpha \mathbf{y}) \times \mathbf{z}, \end{aligned}$$

la quale, essendo vera qualunque sia  $\mathbf{z}$ , dimostra la (18).

Si può trasformare la (18) applicando la formula:

$$(19) \quad K\alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = (I_1\alpha) \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} - (\mathbf{x} \wedge \alpha\mathbf{y} - \mathbf{y} \wedge \alpha\mathbf{x}) \quad (1),$$

e si ha così:

$$(\alpha\mathbf{x}) \wedge (\alpha\mathbf{y}) = (I_2\alpha) \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} - K\alpha[(I_1\alpha) \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} - K\alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})],$$

perciò se si pone:

$$(20) \quad R\alpha = I_2\alpha - K\alpha(I_1\alpha - K\alpha),$$

l'omografia  $R\alpha$  è evidentemente funzione della sola  $\alpha$ , e risulta:

$$(21) \quad (\alpha\mathbf{x}) \wedge (\alpha\mathbf{y}) = R\alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}).$$

In *O. v.*, pag. 24, [1], è assunta la (21) come definizione di  $R\alpha$ , e la (20) vi è stabilita in modo del tutto diverso.

Ciò posto, consideriamo la formula (*O. v.*, pag. 18, [8]):

$$K\alpha \{(\alpha\mathbf{x}) \wedge (\alpha\mathbf{y})\} = (I_3\alpha) \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \quad (2);$$

essa può scriversi, applicando la (21):

$$(K\alpha) R\alpha = I_3\alpha,$$

perciò sostituendo ad  $R\alpha$  il valore (20) risulta:

$$(22) \quad (K\alpha)^3 - (I_1\alpha)(K\alpha)^2 + (I_2\alpha)K\alpha - I_3\alpha = 0.$$

È questa l'identità che volevamo dimostrare. Ponendo  $K\alpha$  al posto di  $\alpha$  si ha ancora:

$$(22') \quad \alpha^3 - (I_1K\alpha)\alpha^2 + (I_2K\alpha)\alpha - I_3K\alpha = 0.$$

Dedurremo ora due proprietà dalla (22); una prima è questa che le omografie  $\alpha$  e  $K\alpha$  hanno gli stessi invarianti, cioè (*O. v.*, pag. 17, [5]):

$$(23) \quad I_r(K\alpha) = I_r\alpha, \quad (r = 1, 2, 3).$$

(<sup>1</sup>) Questa formula si può ottenere da quella di *O. v.*, pag. 18, [7], ponendovi  $K\alpha$  al posto di  $\alpha$ ; però siccome la dimostrazione, che di quest'ultima formula è data in *O. v.*, è piuttosto complicata, è utile far vedere che la (19) può ad es. dedursi subito dalla formula (*O. v.*, pag. 19, [11]):

$$(a) \quad 2V(\mathbf{x} \wedge \alpha) = (I_1\alpha - \alpha)\mathbf{x}$$

la cui dimostrazione è semplicissima. Infatti si ha intanto:

$$K(\mathbf{x} \wedge \alpha) = \mathbf{x} \wedge \alpha - 2V(\mathbf{x} \wedge \alpha) \wedge,$$

perciò ricordando la (a), si ha, se  $\mathbf{y}$  è un vettore qualunque:

$$K(\mathbf{x} \wedge \alpha)\mathbf{y} = \mathbf{x} \wedge \alpha\mathbf{y} - (I_1\alpha)\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} + (\alpha\mathbf{x}) \wedge \mathbf{y},$$

e poichè il primo membro può scriversi (*O. v.*, pag. 18, [9]):  $-K\alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})$ , la formula precedente non differisce dalla (19).

(\*) Il prof. Marcolongo mi ha scritto, giorni sono, di aver dimostrato in modo semplicissimo questa formula, come pure la [7], pag. 18 di *O. v.*, deducendola direttamente dalle [3], pag. 7 di *O. v.*

Infatti, operando col simbolo  $K$  sulla (22') si ha:

$$(24) \quad K\alpha^3 - (I_1 K\alpha) K\alpha^2 + (I_2 K\alpha) K\alpha - I_3 K\alpha = 0,$$

ma siccome (*O. v.*, pag. 18, [9]):  $K\alpha^r = (K\alpha)^r$ , confrontando le (24), (22) si deducono le (23). La (22') può perciò anche scriversi:

$$(22'') \quad \alpha^3 - (I_1 \alpha) \alpha^2 + (I_2 \alpha) \alpha - I_3 \alpha = 0.$$

Le (23) sono stabilite in modo del tutto diverso in *O. v.*

La seconda proprietà è la seguente. Se  $\beta$  è un'altra omografia vettoriale, le omografie  $\alpha\beta$  e  $\beta\alpha$  hanno gli stessi invarianti, cioè:

$$(25) \quad I_r(\alpha\beta) = I_r(\beta\alpha), \quad (r = 1, 2, 3).$$

Infatti, ponendo nella (22'') al posto di  $\alpha$ , prima  $\alpha\beta$  e poi  $\beta\alpha$ , si ha:

$$(26) \quad \alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta - [I_1(\alpha\beta)] \alpha\beta\alpha\beta + [I_2(\alpha\beta)] \alpha\beta - I_3(\alpha\beta) = 0,$$

$$(27) \quad \beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha - [I_1(\beta\alpha)] \beta\alpha\beta\alpha + [I_2(\beta\alpha)] \beta\alpha - I_3(\beta\alpha) = 0;$$

operando a destra con  $\alpha$  sulla (26), e a sinistra pure con  $\alpha$  sulla (27), risulta:

$$\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha - [I_1(\alpha\beta)] \alpha\beta\alpha\beta\alpha + [I_2(\alpha\beta)] \alpha\beta\alpha - [I_3(\alpha\beta)] \alpha = 0,$$

$$\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha - [I_1(\beta\alpha)] \alpha\beta\alpha\beta\alpha + [I_2(\beta\alpha)] \alpha\beta\alpha - [I_3(\beta\alpha)] \alpha = 0;$$

il confronto di queste due identità fornisce le (25). In *O. v.* le (25) sono state ottenute, in modo del tutto diverso, solo per  $r=1$  (pag. 20, [16]) e per  $r=3$  (pag. 8, [8]). Per  $r=2$  la formula potrebbe pure dedursi dalle [6], [12] di pag. 25.

*Osservazione.* — Due altre proprietà assai utili sono le seguenti. Se  $u, v, \dots$  sono numeri funzioni di  $P$ , ed  $\mathbf{x}(u, v, \dots)$  è un vettore funzione di  $u, v, \dots$  (e quindi di  $P$ ), si hanno le formule seguenti, facili da dimostrarsi:

$$\operatorname{div} \mathbf{x} = (\operatorname{grad} u) \times \frac{d\mathbf{x}}{du} + (\operatorname{grad} v) \times \frac{d\mathbf{x}}{dv} + \dots$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{x} = (\operatorname{grad} u) \wedge \frac{d\mathbf{x}}{du} + (\operatorname{grad} v) \wedge \frac{d\mathbf{x}}{dv} + \dots$$

Per mezzo della prima di queste formule, si può semplificare la dimostrazione della (17).



**Matematica.** — *Sull'equazione alle semisomme e sul teorema di Hurwitz.* Nota del dott. L. ORLANDO, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

In due lavori, recentemente inseriti nei Rendiconti di questa illustre Accademia, ho detto ciò che intendo per problema di Hurwitz; ed ho, nel primo lavoro, ricondotta la risoluzione del problema alla costruzione della *equazione alle semisomme* relativa all'equazione data, e, nel secondo, alla costruzione di uno speciale determinante. I due metodi sostanzialmente coincidono.

Qui voglio esporre alcune osservazioni, le quali dimostrano la coincidenza dei due metodi; poi voglio dimostrare, per via algebrica, con mezzi molto più elementari di quelli adoperati dall'illustre Autore, il teorema che Hurwitz stabilisce per risolvere l'importante problema. Resteranno ancora da ricercarsi le relazioni fra il metodo di Hurwitz e quello che fa capo all'equazione alle semisomme, ma intanto non sarà male fermarsi ai concetti finora stabiliti.

1. Siano  $-r_1, -r_2, \dots, -r_n$  le  $n$  radici dell'equazione di grado  $n$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

dove, per semplicità (non restrittiva), vogliamo considerare  $a_0 = 1$ . Possiamo dunque scrivere

$$f(x) = (x + r_1)(x + r_2) \dots (x + r_n).$$

Consideriamo il determinante d'ordine  $n - 1$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & . & . & . & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

Il procedimento d'induzione lascia dimostrare, come vediamo subito, la formula

$$(1) \quad D_{n-1} = (r_1 + r_2)(r_1 + r_3) \dots (r_1 + r_n) \dots (r_{n-1} + r_n),$$

dove s'intendono combinate a due a due, in tutti gli  $\binom{n}{2}$  modi, le  $n$  grandezze  $r_1, r_2, \dots, r_n$ .

Osserviamo intanto che la (1) è senz'altro valida per i polinomi di grado 2: poi ammettiamola fino al grado  $n$ , e vedremo che resterà valida per il successivo grado  $n+1$ .

Costruiamo il determinante, d'ordine  $n$ , analogo a  $D_{n-1}$ , per il polinomio di grado  $n+1$

$$R(x) = f(x)(x+r).$$

Otteniamo

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 + a_0 r & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 + a_1 r & a_1 + a_0 r & a_1 + a_0 r & \dots & 0 \\ a_3 + a_2 r & a_2 + a_1 r & a_3 + a_2 r & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n + a_{n-1} r \end{vmatrix}.$$

Innalzando di un'unità l'ordine di questo determinante, lo possiamo mettere nella forma

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} \\ \pm r^n & \mp r^{n-1} & \pm r^{n-2} & \dots & -r & 1 \end{vmatrix}.$$

Basta ora moltiplicare la prima colonna per  $\mp a_0$ , la seconda per  $\mp a_1, \dots$ , e poi sommare coll'ultima moltiplicata per  $a_n$ , per vedere che esso vale  $\frac{1}{a_n} f(r) a_n D_{n-1}$ , cioè  $f(r) D_{n-1}$ . Ma  $f(r)$  vale  $(r+r_1)(r+r_2)\dots(r+r_n)$ , dunque fornisce ciò che manca al prodotto (1) perchè contenga tutte le  $\binom{n+1}{2}$  somme binarie formate combinando le  $n+1$  grandezze  $r_1, r_2, \dots, r_n, r$ . Ciò dimostra, secondo il criterio d'induzione, la generale validità della (1).

Ora consideriamo il polinomio  $P(x) = f(x+y)$ , e coi coefficienti di  $P(x)$ , i quali sono funzioni di  $y$ , costruiamo il determinante d'ordine  $n-1$ , analogo a  $D_{n-1}$ , che chiameremo  $F(y)$ . In forza del teorema espresso dalla formula (1), potremo scrivere

$$F(y) = (r_1 + r_2 + 2y) \dots (r_1 + r_n + 2y) \dots (r_{n-1} + r_n + 2y),$$

perchè le radici di  $P(x) = 0$  saranno evidentemente  $-r_1 - y, -r_2 - y, \dots, -r_n - y$ .

Dopo ciò, risulta senz'altro che l'equazione  $F(y) = 0$  è l'equazione alle semisomme relativa all'equazione  $f(x) = 0$ . Moltiplicando  $F(y)$  per  $f(y)$  si ritrova l'equazione stabilita nel precedente lavoro: anch'essa è l'equazione alle semisomme, ma con elementi ripetuti, cioè, fra le altre semisomme, vi figurano  $\frac{r_1 + r_1}{2} = r_1$ , ecc.

2. Ed ora noi vogliamo dimostrare algebricamente il teorema di Hurwitz. Chiamando con  $D_v$  il minore formato colle prime  $v$  linee e colle prime  $v$  colonne di  $D_{n-1}$ , e considerando anche  $D_n = a_n D_{n-1}$ , scriviamo la catena

$$(2) \quad a_0, D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, D_n.$$

Supponiamo ancora  $a_0 = 1$ , e supponiamo reali gli altri coefficienti di  $f(x)$ . Il teorema di Hurwitz si enuncia allora in questo modo:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè  $f(x) = 0$  abbia negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse è che gli elementi della catena (2) siano positivi.*

Sarà opportuno fare alcune premesse.

Consideriamo, per esempio, il determinante

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_9 & a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \\ -r^5 & r^4 & -r^3 & r^2 & -r & 1 \end{vmatrix}.$$

Moltiplichiamo rispettivamente le ultime quattro colonne per gli aggiunti degli elementi dell'ultima linea del determinante

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ -r^3 & r^2 & -r & 1 \end{vmatrix}.$$

Così l'ultima colonna di  $\Delta_5$  avrà tutti zeri, tranne i due ultimi elementi, che saranno  $D_4$  e  $\Delta_3$ . Ma  $\Delta_5$  sarà stato moltiplicato per  $D_3$ , dunque, sviluppando, otteniamo  $D_3 \Delta_5 = \Delta_3 D_5 + r D_4 \Delta_4$ . In modo perfettamente analogo, che a scanso d'ingombro non descriviamo ulteriormente, otteniamo la formula generale

$$(3) \quad D_{v-1} \Delta_{v+1} = \Delta_{v-1} D_{v+1} + r D_v \Delta_v,$$

valida a partire da  $v = 2$  fino a  $v = n - 1$ .



Sia ora  $r$  un parametro reale positivo; allora basterà ammettere che  $f(x) = 0$  abbia negative le radici reali e le parti reali delle radici, e che verifichi il teorema di Hurwitz, poi ammettere che  $\Delta_{v-1}$  e  $\Delta_v$  siano positivi, perchè ne risulti positivo anche  $\Delta_{v+1}$ .

Se poi  $r$  è complesso  $= \alpha + i\beta$ , con  $\alpha$  positivo, allora consideriamo anche il coniugato  $r' = \alpha - i\beta$ , e sia  $(x - r)(x - r') = x^2 + kx + l$ . Il determinante  $\Theta_v$ , (analogo a  $D_v$  e a  $\Delta_v$ ), formato coi coefficienti di

$$S(x) = f(x)(x^2 + kx + l),$$

ha gli elementi reali, sebbene  $\Delta_v$  non li abbia. Per esempio sarà

$$\Theta_3 = \begin{vmatrix} a_1 + ka_0 & a_0 & 0 \\ a_3 + ka_2 + la_1 & a_2 + ka_1 + la_0 & a_1 + ka_0 \\ a_5 + ka_4 + la_3 & a_4 + ka_3 + la_2 & a_3 + ka_2 + la_1 \end{vmatrix}.$$

Come la (3), si stabilisce anche la formula

$$(4) \quad \Delta_{v-1}\Theta_{v+1} = \Theta_{v-1}\Delta_{v+1} + r'\Delta_v\Theta_v.$$

Queste due formule (3) e (4) mostrano che basta, oltre le precedenti ipotesi, ammettere positive le parti reali di  $\Delta_{v-1}$ ,  $\Delta_v$ , perchè risulti positiva la grandezza reale  $\Theta_{v+1}$ .

Dopo ciò, aggiungendo ovvie osservazioni, noi possiamo, senza molto indugiareci, asserire che il criterio d'induzione lascia agevolmente stabilire la prima parte del teorema di Hurwitz: se un polinomio a coefficienti reali ha negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse, allora gli elementi (2) relativi a questo polinomio debbono essere positivi.

Dobbiamo ancora dimostrare che tale condizione è anche sufficiente. Intanto osserviamo che  $f(x)$ ,  $f(x)(x^2 + \omega_1)$ ,  $f(x^4 + \omega_1x^2 + \omega_2)$  hanno gli stessi  $D_v$ .

Supponiamo, dopo ciò, positivi gli elementi (2), e sia (per assurdo)  $r = \alpha$ , ovvero  $r = \alpha + i\beta$ , con  $\alpha$  non negativo, una radice di  $f(x)$ . Intanto  $f(x)$  deve avere qualche altra radice reale non negativa, o qualche altra coppia di radici coniugate con parte reale non negativa: ciò risulta senza altro dal segno positivo di  $a_n$ , e dalla (1), dove  $D_{n-1}$  è positivo.

Ma allora il polinomio  $\frac{f(x)}{x - \alpha}$  o il polinomio  $\frac{f(x)}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$ , di gradi inferiori ad  $n$ , dovrebbero avere i  $D$  positivi, e qualche radice reale non negativa o qualche radice complessa con parte reale non negativa; ciò starebbe contro (per gradi  $< n$ ) al teorema di Hurwitz; ma tale teorema è valido per i polinomi di secondo grado, dunque il criterio d'induzione lascia subito stabilire anche questa seconda parte.

**Meccanica.** — *Sul potenziale newtoniano di una circonferenza omogenea.* Nota di G. PAVANINI, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

L'attrazione newtoniana dovuta ad una circonferenza materiale fu già studiata da diversi autori. Il potenziale relativo venne espresso da questi o mediante serie infinite d'armoniche sferiche, o coll'uso di integrali ellittici di Jacobi.

Mi propongo nella presente Nota di assegnare l'espressione dello stesso potenziale mediante le funzioni di Weierstrass.

Già il prof. H. Nagaoka ha trattato l'analoga questione per il potenziale di una corrente elettrica circolare arrivando al risultato per via indiretta <sup>(1)</sup>.

Io ho preferito il calcolo diretto, che pur riesce assai semplice, e sono giunto ad una formula finale che mi sembra espressiva, e tale da mostrare una volta di più la convenienza dell'uso sistematico delle notazioni di Weierstrass.

Ricavo in particolare il comportamento assintotico del potenziale e delle componenti dell'attrazione quando il punto potenziato si avvicina indefinitamente alla circonferenza potenziante. Ritrovo, per questo caso, le espressioni date in generale dal prof. T. Levi-Civita per l'attrazione newtoniana di una linea in punti prossimi alla linea stessa <sup>(2)</sup>.

1. Sia  $a$  il raggio di una circonferenza materiale  $C$  omogenea e di massa totale eguale ad uno;  $ds$  un generico elemento di  $C$ , ed  $r$  la distanza di un punto potenziato  $P$  dall'elemento potenziante  $ds$ .

Il potenziale newtoniano è allora

$$V = \frac{1}{2\pi a} \int_C \frac{ds}{r}.$$

Assumiamo un sistema di assi coordinati cartesiani ortogonali coll'origine nel centro  $O$  della circonferenza, e l'asse  $z$  perpendicolare al piano della medesima. Poniamo ( $P_1$  essendo la proiezione di  $P$  sul piano  $z=0$ )  $\overline{OP}_1 = \varrho$ , ed indichiamo con  $\varphi$  l'angolo formato dal raggio della circonferenza passante per l'elemento potenziante con  $\overline{OP}_0$ . Avremo:

$$r^2 = a^2 + \varrho^2 + z^2 - z^2 a \varrho \cos \varphi,$$

<sup>(1)</sup> *Note on the Potential and the Lines of Force of a Circular Current.* Journal of the College of Science of Tōkyō; vol. XVI, art. 15.

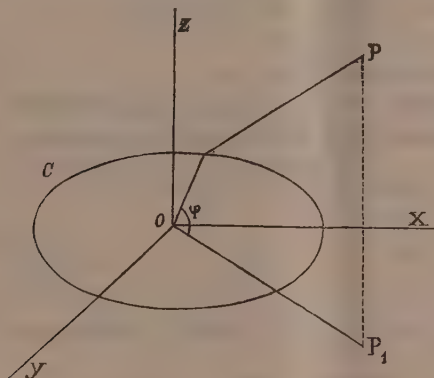
<sup>(2)</sup> *Sull'attrazione esercitata da una linea materiale in punti prossimi alla linea stessa.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVII, 2° sem. 1908.

nonchè

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 + \varrho^2 + z^2 - 2a\varrho \cos \varphi}},$$

od anche, come si può facilmente vedere (scindendo in quattro quadranti l'intervallo d'integrazione, e cambiando nel III e nel IV la designazione della variabile)

$$(1) \quad V = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 + \varrho^2 + z^2 - 2a\varrho \cos \varphi}}.$$



2. Per introdurre le trascendenti ellittiche conviene in primo luogo sostituire a  $\varphi$  una nuova variabile  $p$  legata ad essa dalla relazione (1)

$$\cos \varphi = hp + k,$$

dove  $h$  e  $k$  dipendono dal punto  $P$  (e dalle dimensioni della circonferenza) a norma delle formule

$$(2) \quad h^3 = \frac{2}{a\varrho}, \quad k = \frac{a^2 + \varrho^2 + z^2}{6a\varrho}.$$

Ciò posto, avremo:

$$\begin{aligned} \sin \varphi \sqrt{a^2 + \varrho^2 + z^2 - 2a\varrho \cos \varphi} &= \\ &= \sqrt{1 - (hp + k)^2} \sqrt{(a^2 + \varrho^2 + z^2) - 2a\varrho(hp + k)} \\ &= \sqrt{4p^3 - \frac{4}{h^2}(1 + 3k^2)p - \frac{8k}{h^3}(k^2 - 1)}, \end{aligned}$$

od anche, ponendo ancora

$$(3) \quad g_2 = \frac{4}{h^2}(1 + 3k^2) \quad \text{e} \quad g_3 = \frac{8k}{h^3}(k^2 - 1),$$

$$\sin \varphi \sqrt{a^2 + \varrho^2 + z^2 - 2a\varrho \cos \varphi} = \sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}.$$

(1) Cfr. H. Nagaoka, l. c.



La (1) diviene quindi

$$(4) \quad V = -\frac{h}{\pi} \int_{\frac{1-k}{h}}^{-\frac{1+k}{h}} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}.$$

La forma stessa della quantità sotto il segno suggerisce l'adozione di una nuova variabile ausiliaria  $u$  definita dall'equazione differenziale

$$\frac{dp}{du} = \sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3},$$

dove  $g_2$  e  $g_3$  sono dati dalle (3).

Risulta da questa posizione che  $p$  si può riguardare come la funzione ellittica di Weierstrass gli invarianti della quale sono  $g_2$  e  $g_3$ .

Le radici dell'equazione  $\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = 0$  disposte per ordine di grandezza sono:

$$e_1 = \frac{2k}{h}, \quad e_2 = \frac{1-k}{h}, \quad e_3 = -\frac{1+k}{h}.$$

Esse si mantengono sempre reali e perciò il discriminante

$$\begin{aligned} \Delta &= \{4(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)\}^2 \\ &= \frac{64}{h^6} (9k^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

è sempre positivo, e non si annulla che per  $k = \frac{1}{3}$ , cioè, a norma delle (2), quando il punto potenziato trovasi sulla circonferenza, caso che per ora escluderemo.

In queste condizioni i due periodi di  $p$  sono l'uno reale e l'altro puramente immaginario, determinati notoriamente dalle formule

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}, \quad \omega' = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}.$$

Dacchè, per  $p = -\frac{1+k}{h} = e_3$ ,  $u = \omega'$ , e per  $p = \frac{1-k}{h} = e_2$ ,  $u = \omega + \omega'$ , abbiamo dalla (4)

$$V = -\frac{h}{\pi} \int_{\omega+\omega'}^{\omega'} du$$

e quindi

$$(5) \quad V = \frac{h}{\pi} \omega,$$

espressione quanto mai semplice e notevole del nostro potenziale.

3. Passiamo a considerare il caso particolare nel quale il punto potenziato s'avvicina indefinitamente alla circonferenza. Il determinante  $\Delta$  converge allora verso zero,  $e_1$  tende a confondersi con  $e_2$ , e la  $p$  a degenerare in funzione iperbolica. Conseguentemente  $\omega$  tende a divenire infinito e con esso pure infinito diviene  $V$ . Ciò s'accorda con risultati ben noti <sup>(1)</sup>.

In modo più preciso mi propongo di determinare per questo caso limite una espressione assintotica di  $V$ , che metta in evidenza in qual modo divengono infinite così questa funzione come le sue derivate (componenti dell'attrazione).

4. Sia  $O'$  il punto della circonferenza (arbitrariamente prescelto) al quale il punto potenziato  $P$  s'avvicina indefinitamente. Senza ledere la generalità possiamo manifestamente supporre che  $O'$  appartenga all'asse delle  $y$  ed abbia quindi le coordinate  $(0, a, 0)$ .

Supposto  $P$  già abbastanza prossimo ad  $O'$  potremo senz'altro ritenere  $g_3$  negativo, e valido perciò il seguente sviluppo di  $\omega$  <sup>(2)</sup>:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt[4]{12g_2}} \left\{ Q - F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \tau^2\right) \log 24 \sqrt[3]{3} \tau \right\},$$

dove  $Q$  è una serie che procede per le potenze intere e positive di  $\tau^2$ ,  $F$  la nota serie ipergeometrica di Gauss, e  $\tau^2$  l'inverso dell'invariante assoluto  $J$ , cioè

$$(6) \quad \tau^2 = \frac{\Delta}{g_2^3} = \frac{(9k^2 - 1)^2}{(3k + 1)^3};$$

$Q$  ed  $F$  essendo assolutamente ed uniformemente convergenti per  $|\tau| < 1$ .

Ciò premesso, ove si ponga (tenendo presente l'espressione di  $g_2$  data dalle (3))

$$V_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt[4]{h^3}}{\sqrt[4]{3(1+3k^2)}} \left\{ Q - F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \tau^2\right) \log 24 \sqrt[3]{3} \right\},$$

$$V_2 = -\frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt[4]{h^3}}{\sqrt[4]{3(1+3k^2)}} F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \tau^2\right) \log \tau,$$

la (6) può essere scritta

$$V = V_1 + V_2.$$

5. Per riconoscere il comportamento delle funzioni  $V_1$  e  $V_2$  conviene anzitutto esplicitare la dipendenza di  $h$ ,  $k$  e  $\tau$  dagli elementi geometrici della questione (posizione di  $P$  rispetto alla circonferenza).

A questo scopo assumeremo un nuovo sistema di assi coordinati  $O'x'y'z'$  legato al precedente dalle formule di trasformazione

$$x = x' \quad , \quad y = y' - a \quad , \quad z = z',$$

<sup>(1)</sup> Cfr. per es. Betti, *Teoria delle forze newtoniane*, pag. 20.

<sup>(2)</sup> Cfr. G. H. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, tom. I, pag. 345.

con che è lecito ritenere  $x', y', z'$  comunque piccoli, purchè soltanto si supponga P già abbastanza prossimo ad O'. Indichiamo poi con  $\epsilon$  la distanza  $\overline{PO'}$ ; sarà

$$\epsilon^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Avremo così (rammentando che  $\varrho^2 = x^2 + y^2$ )

$$\varrho^2 = a^2 \left( 1 - \frac{2y'}{a} + \frac{x'^2 + y'^2}{a^2} \right),$$

dove (sempre per P abbastanza vicino ad O') si può ritenere

$$\left| -\frac{2y'}{a} + \frac{x'^2 + y'^2}{a^2} \right|$$

comunque piccolo, in particolare minore di 1. Con ciò lo sviluppo binomiale ci dà:

$$(7) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{y'}{a} + \eta \right), \text{ e } \varrho^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left( 1 + \frac{y'}{2a} + \eta_1 \right),$$

rappresentando con  $\eta$  ed  $\eta_1$  termini di secondo ordine almeno in  $x', y', z'$ .

Consideriamo ora l'espressione  $\frac{\sqrt[4]{h^3}}{\sqrt[4]{3(1+3k^2)}}$  che si presenta tanto in  $V_1$  quanto in  $V_2$ .

Per la prima delle (2) e per la seconda delle (7) abbiamo intanto

$$(8) \quad \sqrt[4]{h^3} = \sqrt[4]{\frac{2}{a}} \varrho^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{a} \left( 1 + \frac{y'}{2a} + \eta_1 \right).$$

Sostituendo poi nella seconda delle (2) le nuove variabili, ed avendo riguardo alla prima delle (7), otteniamo

$$k = \frac{1}{3} (1 + \eta_2),$$

e quindi

$$(8') \quad (1 + 3k^2)^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} (1 + \eta_3),$$

nelle quali  $\eta_2$  ed  $\eta_3$  hanno significato e comportamento analogo alle precedenti  $\eta$ . Dalle (8) ed (8') ricaviamo dunque:

$$(9) \quad \frac{\sqrt[4]{h^3}}{\sqrt[4]{3(1+3k^2)}} = \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{y'}{2a} + H \right),$$

dove il termine addizionale H è anch'esso d'ordine non inferiore al secondo.



Diamo forma conveniente al nostro scopo anche alla funzione  $9k^2 - 1$  che apparisce nella espressione (6) di  $\tau$ . Per la seconda delle (2) abbiamo

$$9k^2 - 1 = \frac{1}{4a^2\varrho^2} \{ (a^2 + \varrho^2 + z^2) - 4a^2\varrho^2 \},$$

e, introducendo le nuove variabili,

$$9k^2 - 1 = \frac{1}{4a^2\varrho^2} \{ 4a^2\varepsilon^2 - 4a^2x'^2 - 4a^2y'\varepsilon^2 + \varepsilon^4 \},$$

od anche

$$(10) \quad 9k^2 - 1 = A(\varepsilon^2 - x'^2),$$

essendo

$$(10') \quad A = \frac{1}{\varrho^2} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x'^2} \left( \frac{y'}{a} - \frac{\varepsilon^2}{4a^2} \right) \right\}.$$

6. Siamo ora in grado di vedere come si comportano nel caso limite le quantità  $V_1$  e  $V_2$  e le loro derivate.

Tanto la  $Q$  quanto la  $F$  che appariscono in  $V_1$  sono funzioni olomorfe di  $\tau$  per  $|\tau| < 1$ , e quindi anche allora che il punto potenziato si avvicina indefinitamente alla circonferenza (cioè quando  $k$  tende verso  $\frac{1}{3}$  e perciò  $\tau$  verso 0).

Di più con  $Q$  ed  $F$  si mantengono finite anche le loro derivate rispetto ad  $x', y', z'$ . Basta osservare infatti che i termini di queste funzioni, a meno d'un coefficiente numerico, sono del tipo  $\tau^{2m}$ , e che perciò le loro derivate si presentano sotto la forma  $2m\tau^{m-1} \frac{\partial \tau}{\partial t}$  (dove  $t$  indica una qualunque delle variabili  $x', y', z'$ ) ed infine aver presente che  $\frac{\partial \tau}{\partial t}$  ha per limite lo 0, come facilmente si può verificare in base alle (6) ed (11).

Il coefficiente  $\frac{1/\hbar^3}{\sqrt[4]{3(1+3k^2)}}$  che compare tanto in  $V_1$  quanto in  $V_2$  si mantiene finito assieme alle sue derivate, come risulta dalla (9).

Così intanto si può concludere che  $V_1$  si mantiene finita assieme alle sue derivate.

Passiamo a  $V_2$ . In questa la serie  $F$  è moltiplicata per  $\log \tau$ : avremo quindi da considerare dei termini del tipo  $\tau^{2m} \log \tau$ , fatta astrazione da un coefficiente che, a norma delle (9), si mantiene finito assieme alle sue derivate. Per  $m = 1, 2, 3 \dots$

$$\lim_{\tau=0} \tau^{2m} \log \tau = 0,$$

e, per gli stessi valori di  $m$ , le derivate di  $\tau^{2m} \log \tau$ , essendo della forma

$$(2m \tau^{2m-1} \log \tau + \tau^{2m-1}) \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

hanno pure per limite lo 0.

Indichiamo con  $V_2''$  l'insieme dei termini di  $V_2$  che corrispondono ad  $m = 1, 2, 3 \dots$  e che, come s'è visto ora, si mantengono finiti assieme alle loro derivate. Potremo scrivere pertanto

$$V_2 = V_2' + V_2'',$$

essendo

$$V_2' = -\frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt[4]{h^3}}{\sqrt[4]{3(1+3k^2)}} \log \tau.$$

Dalla (6) abbiamo:

$$\log \tau = \log(9k^2 - 1) - \frac{3}{2} \log(3k + 1).$$

Osserviamo che  $\log(3k + 1)$  si mantiene sempre finito e con esso anche le sue derivate.

Per la (10) poi

$$\log(9k^2 - 1) = \log(\varepsilon^2 - x'^2) + \log A:$$

qui pure possiamo affermare che  $\log A$  si conserva sempre finito assieme alle sue derivate. Ciò risulta immediatamente dalle (10'), semprechè si escluda, com'è nella natura del problema, che il punto potenziato s'avvicini alla circonferenza nella direzione tangenziale; o, più precisamente, si ritenga diverso dall'unità il limite inferiore del rapporto  $\frac{x'}{\varepsilon}$  al convergere di  $\varepsilon$  verso 0 <sup>(1)</sup>.

Per la (9) inoltre

$$\frac{\sqrt[4]{h^3}}{\sqrt[4]{3(1+3k^2)^3}} \log(\varepsilon^2 - x'^2) = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{y'}{2a}\right) \log(\varepsilon^2 - x'^2) + \frac{1}{a} H \log(\varepsilon^2 - x'^2)$$

e per essere  $H$  di secondo ordine nelle  $x', y', z'$  ne discende che tanto  $H \log(\varepsilon^2 - x'^2)$  quanto le sue derivate tendono al limite 0.

Da tutto questo si raccoglie che la cercata espressione assintotica  $V^{(a)}$  di  $V$  atta alla derivazione è

$$(11) \quad V^{(a)} = -\frac{1}{2\pi a} \left(1 + \frac{y'}{2a}\right) \log(\varepsilon^2 - x'^2).$$

<sup>(1)</sup> Tenuta presente tale circostanza, si può accertare materialmente sulla espressione di  $A$  e delle sue derivate che tutto resta finito.

Ad essa si può, volendo, sostituire

$$(11') \quad V^{(a)} = -\frac{1}{2\pi a} \log(\epsilon^2 - x'^2) - \frac{y'}{2\pi a^2} \log \epsilon$$

perchè la differenza

$$-\frac{y'}{2\pi a^2} \log\left(\frac{\epsilon^2 - x'^2}{\epsilon^2}\right)$$

si mantiene finita assieme alle sue derivate.

L'espressione (11) ha la forma attribuita dal prof. T. Levi-Civita nel caso generale di una linea materiale qualunque <sup>(1)</sup>.

**Meteorologia.** — *Le isanomale termiche in Italia e loro relazione con la distribuzione della pressione barometrica e con la circolazione aerea nei bassi strati dell'atmosfera.* Nota di FILIPPO EREDIA, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

1. Come è noto varî studiosi hanno determinato le temperature normali che spettano ai singoli paralleli dell'emisfero Nord e dell'emisfero Sud fornendo in tal modo dati interessanti poichè da essi si possono desumere elementi per spiegare in quale proporzione le cause di riscaldamento e di raffreddamento, quali per esempio le correnti marine, contribuiscono nelle differenze che si hanno fra le temperature dei varî paralleli.

Se si paragona la temperatura media quale risulta dalle osservazioni meteorologiche eseguite in una data località con la temperatura che spetta alla latitudine della stazione, non si osserva concordanza, e la differenza costituisce l'anomalia termica di quella località. Se si determina l'anomalia termica per i diversi luoghi di una regione, riunendo i punti di uguale anomalia, si ottengono le isanomale termiche, e tenendo presente l'orografia della regione si possono esaminare le cause che producono le anomalie.

Diversi studiosi si sono occupati della determinazione delle isanomale.

L. Teisserenc de Bort <sup>(2)</sup> esaminò le isanomale per tutto il globo e per la determinazione di tali curve in Italia, considerò le temperature di 29 città italiane aventi però alcune 13 anni di osservazioni, altre 2 anni e una un anno soltanto.

E. Sella <sup>(3)</sup> esaminò la distribuzione delle isanomale utilizzando le formule di Spitaler per le temperature dei paralleli e le isoterme pubblicate

<sup>(1)</sup> Cfr. loc. cit., pag. 13.

<sup>(2)</sup> Teisserenc de Bort, *Étude sur la distribution relative, à la surface du globe, des températures et des pressions moyennes pendant les mois de janvier et de juillet.* Annales du Bureau Central Météorologique de France, année 1878, p. IV.

<sup>(3)</sup> E. Sella, *Ueber holosphärische Isanomalien der Temperatur.* Meteorologische Zeitschrift, Band XXXI (1896), S. 161-166.



da Hann per le temperature osservate nelle varie località. In detto pregevole lavoro si considera anche l'Italia.

Tutti gli studiosi hanno esaminato le isanomale per una estesa superficie e hanno pertanto considerato il comportamento delle singole regioni rappresentate in scala molto piccola, condizione non molto adatta per accertare le particolarità specialmente locali.

Poichè ho determinato per lo studio della distribuzione della temperatura in Italia, le temperature medie di 120 città tutte ridotte ad un'unica serie di 41 anni di osservazioni (1866-1906), colla presente Nota mi propongo di esaminare la distribuzione delle isanomale termiche in Italia.

Per ciascuna delle 120 città italiane fu calcolata la temperatura media che si dovrebbe osservare secondo la seguente formula di Spitaler:

$$t\varphi = -2,43 + 17,61 \cos \varphi + 7,05 \cos 2\varphi + 19,29 n \cos 2\varphi$$

(ove  $\varphi$  è la latitudine e  $n$  il rapporto dell'estensione delle terre e del mare) per i mesi di gennaio e di luglio e per l'anno

Paragonando poi tale temperatura, calcolata, con la temperatura osservata ridotta al livello del mare, si determinarono i valori dell'anomalia termica, che risultò sempre positiva; e riportandoli sopra una carta geografica si ottennero le linee isanomale di 2 in 2 gradi che qui sotto riproduciamo.

Compulsando la cartina di gennaio (fig. 1) risulta che nella Riviera Ligure si ha un massimo di anomalia; spostandosi verso Nord tale massimo diminuisce per raggiungere un minimo quasi nel centro della Val Padana; e da quest'ultima regione progredendo verso le Alpi si hanno valori crescenti. Lungo le coste del mare Tirreno, del mare Adriatico e del mare Jonio si hanno valori elevati che diminuiscono progredendo verso l'interno ove abbiamo numeri minori.

Esaminando la cartina di luglio (fig. 2) risulta una distribuzione del tutto differente da quella indicata dalla rappresentazione di gennaio. Generalmente si hanno sulle coste valori piccoli che gradatamente aumentano progredendo verso l'interno. E considerando l'insieme dei valori risulta come essi sono molto più piccoli rispetto a quelli di gennaio; il che ci dice come in luglio la distribuzione della temperatura si avvicini di più alla distribuzione teorica.

Compulsando la cartina dell'anno (fig. 3) risulta che nella Riviera Ligure si ha anomalia molto elevata e lungo tutte le rimanenti coste si hanno valori elevati che diminuiscono gradatamente per raggiungere i valori più piccoli nell'interno.

Nella Sicilia tale stato di cose non si presenta in modo molto distinto e nel versante jonico si hanno i valori minori.

2. Vari studiosi hanno messo in luce la relazione che passa tra le isanomale termiche di una regione e la distribuzione barometrica, e sono note le seguenti leggi:

1) Allorquando una regione di una certa estensione offre un eccesso di temperatura sia assoluto, sia relativo alla temperatura dei punti situati



FIG. 1.

sotto la medesima latitudine, vi è tendenza alla formazione di un minimo barometrico in questa regione; questa tendenza si manifesta sia con l'esistenza di un minimo chiuso, sia con l'inflessione delle isobare.

2) I massimi barometrici. punti dove l'aria sfugge divergendo, tendono a stabilirsi di preferenza nelle vicinanze delle regioni dove la temperatura è bassa, sia in un modo assoluto, sia relativamente alla latitudine.

Per vedere quali relazioni possano verificarsi nel nostro Paese, abbiamo paragonato le sopra riportate rappresentazioni, con le relative distribuzioni barometriche ottenute dall'Hann. E da tale esame risulta come nell'anno, in luglio e in gennaio, alle regioni di minima pressione corrispondono ele-

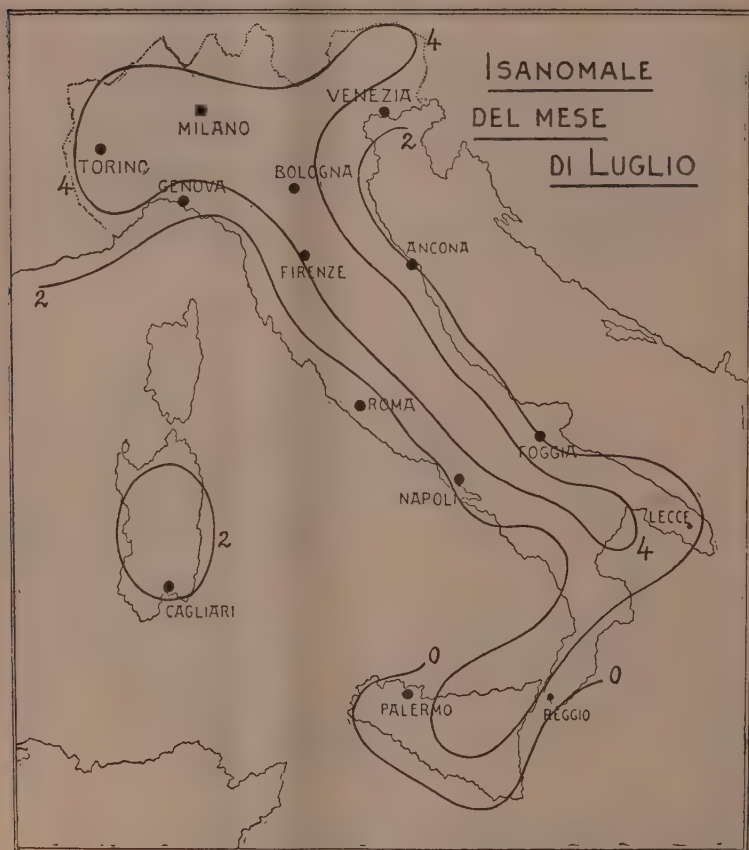


FIG. 2

vati valori di anomalia termica, e alle regioni di massima pressione corrispondono bassi valori di anomalia termica. Così la elevata anomalia termica della Riviera Ligure del gennaio e dell'anno corrisponde ad una minore pressione in quella regione, mentre la bassa anomalia termica del centro della Val Padana specialmente e dell'Italia centrale corrispondono ad una elevata pressione nell'anno e in modo più spiccato in gennaio.

Come è noto molti cicloni o aree di depressioni si presentano sull'Inghilterra o sulle coste occidentali della Francia e alcune spostandosi



danno luogo a depressioni secondarie che si formano sulla Riviera Ligure e talvolta acquistano indipendenza. Chi segue il Bollettino quotidiano del R. Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica in Roma, ha potuto accertare che la frequenza di tali depressioni secondarie è molto più rile-

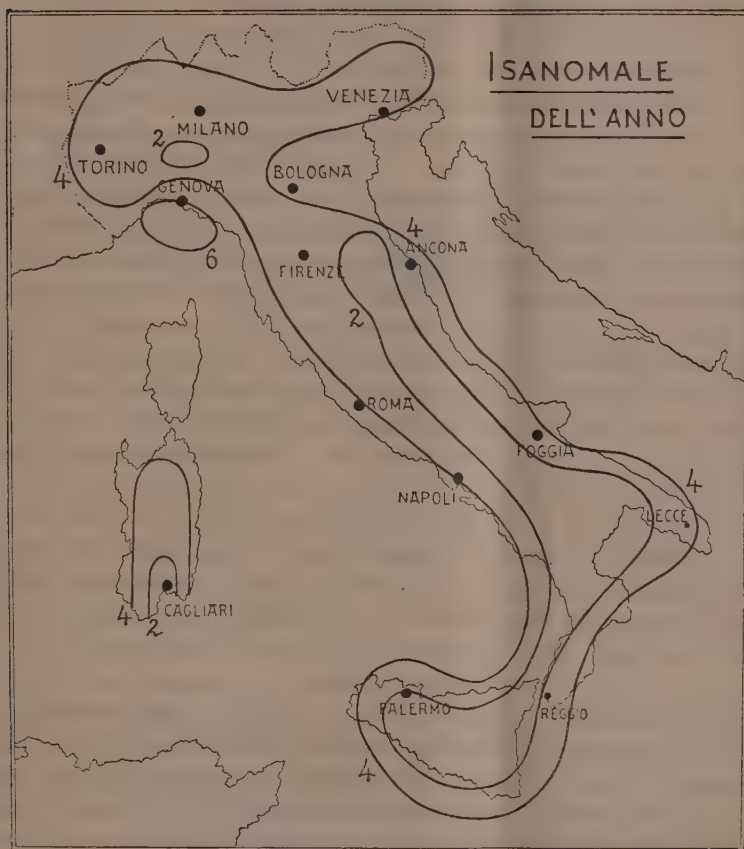


FIG. 3.

vante in gennaio che in luglio. E poichè nell'epoca di maggiore frequenza corrispondono elevati valori di anomalia termica, e siccome quando un'area di depressione si avvicina ad una regione molto riscaldata tende ad estendersi sulla regione stessa formando talvolta un'area secondaria, si può pensare che la presenza delle depressioni in Liguria sia dovuta essenzialmente all'elevata anomalia di quelle regioni.

Il fatto della rarità delle depressioni che vengono a formarsi nella Valle Padana in inverno, può trovare la spiegazione nei minimi valori dell'anomalia

termica di detta regione, che costituiscono condizioni poco favorevoli all'apparizione di aree di depressione.

La rapidità con la quale si spostano le aree di depressione sull'Italia centrale in inverno può anche trovare spiegazione nella minima anomalia termica che in quell'epoca copre la regione anzidetta.

3. Secondo le teorie che gli studiosi hanno emesso sulla circolazione aerea negli strati inferiori, nell'Europa deve dominare il vento di SW sulle coste occidentali, che ruota in seguito poco a poco in modo da soffiare da W e poi da NW sull'Europa orientale e meridionale. Ma se si esaminano molte osservazioni anemometriche eseguite in diversi punti di un dato rilievo, si nota come non si verifica generalmente tale frequenza di correnti aeree e la discordanza è tanto più sensibile quanto maggiore è il numero dei luoghi di osservazione. Ciò evidentemente è dovuto alle varie influenze locali che si manifestano considerando particolari regioni e che possono interpretarsi esaminando la distribuzione barometrica della regione in esame. E difatti in un recente lavoro <sup>(1)</sup> paragonando la frequenza dei venti in Italia, quale risulta dalle osservazioni anemometriche, con la distribuzione barometrica, si trovò come quest'ultima contribuisce grandemente nell'interpretazione delle leggi che regolano nel nostro Paese la circolazione aerea negli strati inferiori.

Se però alle conoscenze barometriche aggiungiamo i dati dell'anomalia termica, possiamo formarci un criterio molto più concreto di ciò che dovrebbe essere la circolazione aerea nei bassi strati atmosferici, poichè è sotto le influenze termiche locali che la circolazione aerea viene maggiormente modificata.

Se sopra una carta geografica indichiamo la direzione vera dei venti dominanti sulle coste italiane del Tirreno, troviamo come essi varino da luogo a luogo, cosicchè trovano condizioni favorevoli per spirare nella parte più elevata di detto versante i venti di NW e N, nella parte media e centrale i venti di NE, E, SE e nella parte inferiore SW, W; ossia le direzioni che successivamente si osservano seguono la nota legge di Dove e sembrano girare attorno ad un centro corrispondente per la sua localizzazione all'elevata anomalia termica della Liguria. Pertanto possiamo dedurre come è a tale esistenza che maggiormente debba attribuirsi la circolazione aerea che si osserva effettivamente sulle coste tirreniche; e difatti nei mesi estivi scomparendo tale centro di elevata temperatura, si ha una circolazione aerea del tutto opposta.

Se estendiamo il nostro esame alle rimanenti regioni d'Italia vediamo come la anomalia termica ci agevoli all'interpretazione della circolazione

<sup>(1)</sup> F. Eredia, *Le correnti aeree nei bassi strati dell'atmosfera*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVIII, serie 5<sup>a</sup>, 2° sem., 1909.

aerea sulle coste dell'Adriatico e dell'Ionio. Pertanto possiamo concludere che dallo studio delle anomalie termiche in Italia viene confermata la circolazione aerea nei bassi strati atmosferici quale fu svolta in una nostra precedente ricerca.

Geologia. — *Sull'età degli strati a Posidonomya dell'Appennino toscano e dell'Albania.* Nota del dott. A. MARTELLI, presentata dal Socio C. DE STEFANI.

Nella mia ultima escursione geologica nell'Albania meridionale, raccolti nella catena di displuvio fra la baia di Valona e il bacino della Susica-Vojusa, oltre a campioni di calcari, degli scisti a *Posidonomya*, che corrispondono molto bene anche nel carattere petrografico a quelli dell'Appennino settentrionale.

Il Renz <sup>(1)</sup>, studioso accuratissimo del Mesozoico della parte occidentale della Penisola Balcanica, citò anche per talune località di detta catena la presenza della *Posidonomya Bronni* Quenst., e quindi al Lias superiore riferiva una rilevante serie di scisti e di calcari con selce; ma proseguendo poi nelle sue fortunate ricerche in Epiro e a Corfù e modificando in parte le idee già espresse nel lavoro del 1906, poté stabilire con maggiore sicurezza l'orizzonte delle formazioni fossilifere del Lias e del Dogger <sup>(2)</sup> e accertare che, mentre il Lias superiore e il Dogger inferiore sono ricchi di faune ammonitiche, le parti più alte del Dogger sembrano caratterizzate da un'abbondanza ragguardevole di *Posidonomyae*, diverse dalla *P. Bronni*, e di *Aptyci*.

Corrispondenze geologiche fra le formazioni mesozoiche della Penisola Balcanica e quelle dell'Appennino esistono di rado, ma siccome nei casi nei quali si riscontrano appaiono perfette, così è interessante per noi il soffermarci sull'età degli strati a *Posidonomya*, che sollevarono per la Penisola Balcanica la stessa questione che si agita per il Secondario italiano.

Comparse di *P. Bronni* vennero citate primieramente dal Partsch a Corfù su determinazione di Zittel. Il Renz poi scoprì in talune isole jonie e in più punti dell'Albania meridionale forme di posidonomie, che attribuì pur egli alla *P. Bronni* e conseguentemente alla zona inferiore del Lias superiore. Egli asseriva che malgrado la loro cattiva conservazione corrispondevano in massima alle forme di Svevia e si sarebbero presentate sotto

<sup>(1)</sup> Renz C., *Ueber die mesozoische Formationsgruppe der südwestlichen Balkanhalbinsel*. Neues Jahrbuch für Miner. Geol. und Paläont. Beilage-Band XXI, Stuttgart, 1906.

<sup>(2)</sup> Renz C., *Oberer und mittlerer Dogger auf Corfu und in Epirus*. Monatsber. der deutsch. geolog. Gesellsch. n. 5, Berlin, 1908.

l'aspetto delle due varietà figurate ai numeri 8 e 9 della tavola II del Quensted (*Der Jura*. 1858) ma strette da forme intermedie di passaggio, tanto da non consentire una chiara separazione fra di loro; e faceva pure osservare che la varietà più piccola, comparente di solito negli scisti argillo-calcarei, si accostava assai alla figura dello Steinmann (*Jura und Kreideformation von Caracoles*. tav. 10, fig. 1. 1887) per l'inarcamento della conchiglia, senza però autorizzare il riferimento al gen. *Aulacomya*, per la mancanza — forse anche in difetto di buona conservazione — di ogni traccia del soleo laterale, caratteristico della *Posidonomia* o *Aulacomya Bronni*. Dopo altre ricerche, il Renz afferma, nel successivo lavoro del 1908 relativo al Dogger medio e superiore, di aver trovato numerose posidonomie nel modello interno di uno *Stephanoceras* bajociano superiore e in taluni scisti marnosi, tutte rimarcabili per la conchiglia finamente striata e per la presenza di coste più grossolane che non nella *P. Bronni*, e tali da lasciar presumere la loro appartenenza alle due specie *P. Buchi* Roem. e *P. alpina* Gras. Con questi scisti s'intercalano calcari con selce, i quali nella loro parte più alta comprendono pure scisti conaptici bathoniani. Il Renz, rettificando in complesso l'antior denominazione, attribuiva alle due ultime specie e quindi al Dogger le *Posidonomyae* da lui precedentemente ritrovate nella Penisola Balcanica e riferite al Lias superiore, rappresentato pure da strati fossiliferi, sottostanti.

Calcarei e scisti giallastri, rosei, rossastri e lionati con *Posidonomyae* comparabili con la *P. alpina* e scisti con *Aptyci* lamellosi, vennero da me raccolti nella Sašica ad est della baia di Valona, nel livello più alto dei calcari con selce, e questi due termini fossiliferi della serie mesozoica sviluppata in modo analogo in Epiro e a Corfù corrisponderebbero rispettivamente, secondo il Renz, al Bajociano superiore (zona della *Parkinsonia Parkinsoni*) e al Bathoniano, e apparendo immediatamente sovrapposti ai calcari selciferi con *St. Humphriesianum* equivarrebbero in complesso agli strati di Klaus delle Alpi meridionali.

Qui torna opportuno di ricordare che già il De Stefani nel 1889 (\*), notando che i termini delle Alpi Apuane e dell'Appennino circostante che più hanno bisogno di essere schiariti e ordinati sono quelli fra il Lias e il calcare nummulitico, ricordava che ai calcari del Lias medio e superiore succede una zona di scisti — marnosi, lionati, giallo rossastri, di sovente alternati con calcari cerulei ora compatti, ora alquanto cavernosi — caratterizzati da una grande abbondanza di posidonomie. Queste *Posidonomyae* vennero nel Campigliese riferite dal Coquand (1845) alla *P. Bronni* Quenst. del Lias superiore, e tale riferimento venne pure ripetuto dal Capellini (1862) per le analoghe formazioni del Monte Pisano e del Golfo della Spezia e poi

(\*) De Stefani C., *Le pieghe delle Alpi Apuane*. Pubblic. del R. Istituto di Studi superiori di Firenze, 1889.



da altri; ma il De Stefani ha osservato invece che la *Posidonomya* determinata nel Mesozoico dell'Appennino settentrionale come *Bronni* dal Coquand, Capellini, Cocchi, Meneghini ecc., è rappresentata da forme costantemente oblique e inequilaterali così da corrispondere piuttosto alla *P. alpina* Gras o alla *P. ornati* Quenst, che del resto sono da molti ritenute sinonime. Negli scisti a *Posidonomya* menzionati dal De Stefani, come in quelli dell'Albania sono anche esemplari equilaterali e più alti che larghi, con carattere cioè a comune sia con la *P. Bronni*, sia con la *P. Parkinsoni* Quenst. degli strati a *P. alpina*.

Agli esemplari albanesi, riferiti, per quanto ho esposto, al più alto livello del Bajociano e alla base del Bathoniano, corrisponde bene la descrizione e la figura degli esemplari di Repole date dal De Stefani, poichè anche in essi si osservano da sette a dieci coste talora intramezzate da una o due strie secondarie soltanto e non da un numero molto maggiore com'è carattere della *P. Bronni*, dalla quale rimangono infine differenziati per la mancanza di quel chiaro solco posteriore, proprio del genere *Aulacomya* proposto dallo Steinmann. Paragonando direttamente gli esemplari albanesi con quelli appenninici non può a meno di colpire la perfetta identità dei medesimi come la notevole corrispondenza litologica.

Com'è noto, anche nell'Appennino settentrionale il Lias superiore è caratterizzato da *Posidonomyae* a grosse coste e differenti da quelle che, con i caratteri della *P. alpina* o *P. ornati*, il De Stefani ha ritrovate in una zona alquanto superiore, e da specie di ammoniti a comune con quelle degli strati sincroni della parte occidentale della Penisola Balcanica. Ora, questa analogia di forme e di deposito riscontrata fra il Giurassico appenninico e il greco-albanese, pel quale ultimo il Renz ha dovuto ringiovanire fino al Dogger medio e superiore formazioni che aveva da prima interamente riferite al Lias, prova che il De Stefani aveva ragione quando sosteneva che nella presenza di quelle forme di posidonomie si era ben lungi dal trovare una conferma per l'appartenenza degli strati, da esse caratterizzati, al Lias superiore, mentre con maggiore giustificazione si sarebbero potuti attribuire ad un piano del Dogger. Ed infatti, il detto geologo — senza che in questi ultimi anni siano sopraggiunti argomenti nuovi a modificare al riguardo le sue opinioni ora confermate — scriveva che « le differenze litologiche di detta zona a *Posidonomya* da quelle del Lias superiore dell'Appennino centrale e delle Alpi, la stretta concordanza di essa con le rocce giuresi e cretacee, la sovrapposizione stratigrafica a rocce fossilifere equivalenti al Lias superiore, sono circostanze che provano come essa sia più recente del Lias ».

È notevole infine che nel versante adriatico della Penisola italiana e in quella Balcanica a settentrione del Golfo di Valona, gli strati a *Posi-*

*donomya* del Dogger non vennero ancora trovati <sup>(1)</sup> essendo quel piano rappresentato da strati, che probabilmente furono meno pelagici.

La presente Nota, conseguenza di uno studio di prossima pubblicazione su una delle zone montuose littoranee dell'Albania meridionale, mi venne ispirata dal convincimento che anche il nuovo dato geo-paleontologico raccolto nella Penisola Balcanica potesse valere a chiarire uno dei punti rimasti ancora oscuri ed insoluti della geologia dell'Appennino settentrionale.

**Chimica.** — *Il dicicloesile come solvente crioscopico* <sup>(2)</sup>. Nota di L. MASCARELLI e I. VECCHIOTTI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Il contegno del cicloesano come solvente crioscopico, già studiato da uno di noi <sup>(3)</sup>, ci fece pensare, che il potere associante assai spiccato manifestato da tale solvente non fosse un carattere speciale del cicloesano stesso, ma che invece tale proprietà fosse comune a quella serie di composti, che possono ottenersi dalle sostanze aromatiche per completa idrogenazione. Le ricerche compiute in questi ultimi tempi da uno di noi, ci distolsero dal controllare con esperienze tale previsione, per cui noi siamo stati in parte preceduti nella conferma di questa. E per vero durante i nostri studi sul cicloesano è comparsa una pubblicazione di Chavanne e van Roelen <sup>(4)</sup> nella quale gli Autori dopo aver dichiarato che « quelques essais fait par l'un de nous à ce sujet (cicloesano come solvente crioscopico) se trouvèrent confirmés par une publication de Mascarelli » si sono proposti « de voir si ce caractère était spécial au cyclohexane ou s'il se retrouvait chez d'autres composés hydroaromatiques ». Dalle esperienze da essi fatte col cicloesanol concludono che « le caractère du cyclohexanol employé comme dissolvant cryoscopique est bien analogue à celui du cyclohexane; on a donc des raisons de croire que c'est là un caractère assez général des composés hydroaromatiques ».

Collo stesso intendimento noi abbiamo intrapreso lo studio del comportamento crioscopico del dicicloesile, sostanza questa che si ottiene ora abbastanza facilmente col metodo di Ipatiew <sup>(5)</sup>: cioè idrogenazione del difenile

<sup>(1)</sup> De Stefani C., *Géotectonique des deux versants de l'Adriatique*. Ann. de la Soc. géolog. de Belgique, Mém., t. XXXIII, Liège, 1908.

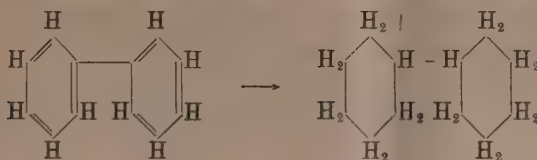
<sup>(2)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

<sup>(3)</sup> L. Mascarelli, Rend. R. Acc. Lincei, 16, I, 924 (1907); id. id., 17, II, 494 (1908); id. id., 18, II, 195 (1909).

<sup>(4)</sup> Bull. de la Soc. Chimique de Belgique, 22, 410.

<sup>(5)</sup> Ber. d. deut. Ch. Gesel. 40, 1281 (1907).

mediante idrogeno in presenza di nichel e sotto alte pressioni:



Noi dobbiamo ringraziare in modo tutto particolare il capitano Ipatiew, il quale colla massima cortesia volle prepararci una buona quantità di dicicloesile, per cui noi fummo in grado di compiere le ricerche propositeci.

Come si vede dalla parte sperimentale il dicicloesile, oltre presentare quelle anomalie, che finora vennero riscontrate in tutti gli idrocarburi usati come solventi crioscopici e cioè fenomeni di associazione delle sostanze ossidrilate, che si manifestano, come è noto, con pesi molecolari superiori ai teorici per gli alcoli, fenoli, ossime ecc., presenta pure anomalie per quelle classi di sostanze che già nel cicloesano si mostrarono anomale.

Le nostre ricerche col dicicloesile sono alquanto limitate e questo per due ragioni: anzitutto la quantità di solvente a nostra disposizione non ci permetteva un gran numero di determinazioni, inoltre la piccola solubilità a freddo di molte sostanze ci impedì di estendere lo studio come sarebbe stata intenzione nostra.

#### PARTE SPERIMENTALE.

Il dicicloesile adoperato era liquido incolore, di odore particolare, bolliva a 236-238° a 757,5<sup>mm</sup>, solidificava a +2,75°. Esso gelava presentando un debole sopraraffreddamento, però le letture erano fra loro concordanti. Non occorsero precauzioni per l'umidità, non essendo il dicicloesile igroscopico.

*Determinazione della costante di abbassamento molecolare.* — Ci servimmo per questo di sostanze, che presumibilmente avessero contegno normale, cioè sostanze appartenenti alle serie degli idrocarburi, degli eteri e dei derivati alogenati, ben sapendosi che fino ad ora queste classi di sostanze si mostrarono sempre crioscopicamente normali.

La media del valore di  $k$  che noi adottammo è quella che risulta dal quadro riassuntivo seguente:

|                                            |             |
|--------------------------------------------|-------------|
| 1) dibenzile media del valore di           | $k = 143.6$ |
| 2) naftalina media del valore di           | " 155.6     |
| 3) etere etilcinnamico media del valore di | " 146.5     |
| 4) capronato di metile media del valore di | " 125.3     |
| 5) ettilato di metile media del valore di  | " 138.3     |
| 6) p-dicloro-benzolo media del valore di   | " 141.2     |
| 7) p-dibromo-benzolo media del valore di   | " 166.0     |
| media generale $k = 145.2$                 |             |

La regola empirica di Raoult <sup>(1)</sup> non si verifica pel dicioesile, come non si verifica pel cicloesano ed in molti altri casi: infatti il valore della costante crioscopica secondo detta regola dovrebbe essere:

$$k = 166 \times 0,62 = 102,9.$$

Invece il valore del rapporto  $\frac{k}{m}$  che, come è noto <sup>(2)</sup>, oscilla per la maggior parte dei solventi crioscopici studiati entro i limiti 1,0-0,4 rientra nei limiti stessi. Pel dicioesile si ha

$$\frac{k}{m} = 0,87.$$

Colla costante ora determinata si calcola mediante la formola di van't Hoff il calore latente di fusione del dicioesile in 10,47 cal. per 1000 gr. di sostanza; da cui 1,74 cal. per una grammimolecola <sup>(3)</sup>.

*Determinazioni crioscopiche.* — Queste comprendono le seguenti serie di composti:

- 1) fenoli;
- 2) alcoli;
- 3) acidi;
- 4) chetoni;
- 5) aldeidi;
- 6) nitroderivati.

Parecchie sostanze con cui avremmo voluto operare si mostrarono insolubili.

Tutti i prodotti usati vennero opportunamente purificati; dei chetoni e dell'aldeide si fece il composto bisolfiteico. Le sostanze liquide furono pesate in pallottoline di vetro saldate e tarate; con quelle igroscopiche si operò in corrente di aria secca.

<sup>(1)</sup> Compt. rend., 95, 1030 (1882).

<sup>(2)</sup> Landolt-Bornstein, Physik-chem. Tabellen 3<sup>a</sup> ediz., pp. 501-504; Bruni, Zeit. f. Elektrochemie, 1905, 861.

<sup>(3)</sup> Nella I Nota riguardante il cicloesano (Gazz. Ch. It., 37, II, 527) è sfuggito un errore di stampa: il calore di fusione per una gr. molecola di cicloesano è 0,645 cal. invece di 0,745.



Ecco i dati dell'esperienza:

| Numero<br>d'ordine                                                                                 | Concentraz. in gr.<br>per cento gr.<br>di solvente | Abbassamento<br>termometrico<br>$\Delta$ | Peso molecolare<br>( $k=145.2$ ) |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------|
| Corpo sciolto: <i>alcool propilico normale</i> = $C_3H_8O$ = 60; p. eb. 97-98° a 761 <sup>mm</sup> |                                                    |                                          |                                  |
| 1                                                                                                  | 0.848                                              | 0.98                                     | 125.7                            |
| 2                                                                                                  | 2.774                                              | 1.64                                     | 245.6                            |
| 3                                                                                                  | 3.970                                              | 2.08                                     | 277.1                            |
| Corpo sciolto: <i>fenolo</i> = $C_6H_5OH$ = 94; p. eb. 182° a 758 <sup>mm</sup>                    |                                                    |                                          |                                  |
| 4                                                                                                  | 1.316                                              | 0.80                                     | 238.9                            |
| Corpo sciolto: <i>acido acetico</i> = $C_2H_4O_2$ = 60                                             |                                                    |                                          |                                  |
| 5                                                                                                  | 0.752                                              | 0.82                                     | 133.2                            |
| 6                                                                                                  | 1.619                                              | 1.70                                     | 138.3                            |
| 7                                                                                                  | 3.029                                              | 2.64                                     | 166.6                            |
| Corpo sciolto: <i>acetofenone</i> = $C_8H_8O$ = 120; p. eb. 201° a 762 <sup>mm</sup>               |                                                    |                                          |                                  |
| 8                                                                                                  | 0.994                                              | 1.32                                     | 109.3                            |
| 9                                                                                                  | 3.101                                              | 3.35                                     | 134.4                            |
| 10                                                                                                 | 5.865                                              | 4.35                                     | 195.8                            |
| 11                                                                                                 | 8.693                                              | 5.13                                     | 246.0                            |
| Corpo sciolto: <i>cicloesanone</i> = $C_6H_{10}O$ = 98; p. eb. 155° a 759 <sup>mm</sup>            |                                                    |                                          |                                  |
| 12                                                                                                 | 1.067                                              | 1.45                                     | 106.8                            |
| 13                                                                                                 | 2.901                                              | 3.44                                     | 122.5                            |
| 14                                                                                                 | 5.085                                              | 4.45                                     | 165.9                            |
| 15                                                                                                 | 7.471                                              | 5.43                                     | 199.8                            |
| Corpo sciolto: <i>acetone</i> = $C_3H_6O$ = 58; p. eb. 56.5 a 763 <sup>mm</sup>                    |                                                    |                                          |                                  |
| 16                                                                                                 | 1.476                                              | 3.14                                     | 68.2                             |
| 17                                                                                                 | 3.126                                              | 4.33                                     | 104.8                            |
| 18                                                                                                 | 4.719                                              | 5.15                                     | 133.1                            |
| 19                                                                                                 | 6.949                                              | 5.88                                     | 171.6                            |
| Corpo sciolto: <i>aldeide benzoica</i> = $C_7H_6O$ = 106; p. eb. 179° a 760 <sup>mm</sup>          |                                                    |                                          |                                  |
| 20                                                                                                 | 0.846                                              | 1.17                                     | 105.0                            |
| 21                                                                                                 | 2.000                                              | 2.41                                     | 120.5                            |
| 22                                                                                                 | 3.008                                              | 3.41                                     | 128.1                            |
| 23                                                                                                 | 4.024                                              | 3.84                                     | 152.2                            |
| Corpo sciolto: <i>nitrobenzolo</i> = $C_6H_5NO_2$ = 123; p. eb. 208° a 761 <sup>mm</sup>           |                                                    |                                          |                                  |
| 24                                                                                                 | 1.136                                              | 1.32                                     | 124.9                            |
| 25                                                                                                 | 2.923                                              | 3.04                                     | 139.6                            |
| 26                                                                                                 | 4.202                                              | 3.54                                     | 172.5                            |
| 27                                                                                                 | 6.185                                              | 4.13                                     | 217.5                            |
| Corpo sciolto: <i>tetranitrometano</i> = $CO_2N_4$ = 196; p. eb. 125° a 6°                         |                                                    |                                          |                                  |
| 28                                                                                                 | 1.270                                              | 1.01                                     | 182.6                            |
| 29                                                                                                 | 2.666                                              | 2.09                                     | 185.2                            |
| 30                                                                                                 | 4.499                                              | 3.13                                     | 208.7                            |

I numeri riportati stanno ad indicarci che il fenolo, l'alcool propilico e l'acido acetico sciolti in dicicloesile sono polimerizzati, poichè i loro pesi molecolari sono assai maggiori del teorico già a concentrazioni inferiori all'1% e crescono rapidamente colla concentrazione. Noi non potemmo, per le ragioni già addotte, sperimentare con altre sostanze ossidrilate, ma da questi dati e dal fatto che tutte le sostanze appartenenti a tali serie mostrano fenomeni più o meno marcati di associazione, se sciolte in idrocarburi, riteniamo che l'anomalia delle sostanze ossidrilate si verifica anche nel dicicloesile.

I chetoni diedero valori, che sono perfettamente comparabili con quelli che si ottennero impiegando il cicloesano come solvente; anche nel dicicloesile essi sono associati. L'aldeide benzoica, che a concentrazione inferiore all'1% ha peso molecolare normale, mostra poi valori anormalmente grandi appena la concentrazione cresce. Fra i nitroderivati il p-nitrotoluolo è insolubile a freddo; il nitrobenzolo diede valori crescenti rapidamente colla concentrazione, mostrando anche qui lo stesso contegno che ha quando venga sciolto in cicloesano. È degno di nota il fatto che il tetranitrometano vi si comporta normalmente: qui la mancanza di atomi di idrogeno nella molecola della sostanza potrebbe far pensare alla impossibilità di generarsi di forme tautomere capaci poi di associazione. Siccome però la questione, alquanto controversa, non può certo risolversi con una sola osservazione, così non vogliamo per ora entrare in merito.

Concludendo possiamo ripetere pel dicicloesile, usato come solvente crioscopico, quelle stesse osservazioni già fatte pel cicloesano (<sup>1</sup>). L'idea da cui prendemmo le mosse, cioè che le proprietà associanti non siano caratteristiche del cicloesano, ma comuni a forse tutti i derivati completamente idrogenati, trova nel dicicloesile una nuova conferma. In queste ricerche noi siamo perfettamente d'accordo colle conclusioni tratte da Chavanne e van Roelen nelle loro misure col cicloesano.

(<sup>1</sup>) Gazz. Ch. It., 39, II, 654 (1909).

Chimica. — *I tellururi d'argento* <sup>(1)</sup>. Nota di G. PELLINI e E. QUERCIGH, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

In questa Nota noi esponiamo i primi risultati di uno studio sui tellururi semplici e doppi di argento e d'oro che abbiamo in corso. Lo scopo di tali ricerche non è solo quello di definire dal punto di vista chimico il comportamento alla fusione dei tre elementi Te, Ag, Au, quando si assoggettano all'azione del calore combinati, in rapporti variabili, a due a due (Te-Ag; Te-Au), oppure in miscela ternaria, ma anche ed in particolar modo queste ricerche hanno lo scopo di chiarire possibilmente la costituzione dei numerosi minerali, che dopo quelli dell'oro nativo, costituiscono i principali giacimenti naturali dell'oro.

Sono noti infatti i minerali: Hessite  $\text{Ag}_2\text{Te}$ ; Calaverite  $\text{AuTe}_2$ , specie rara che frequentemente contiene argento; i minerali Silvanite e Krennerite che i naturalisti raggruppano nel tipo  $(\text{Au}, \text{Ag})_2\text{Te}$  e le Petziti che corrispondono al tipo  $(\text{Au}, \text{Ag})_2\text{Te}$ . La composizione chimica di questi minerali non è tuttavia così semplice, ed è perciò che noi abbiamo creduto di poter contribuire alla esatta conoscenza della loro costituzione, facendo l'analisi termica del sistema ternario Te, Ag, Au, nella supposizione che la natura abbia scelto nella formazione di questi minerali una delle vie più comuni, la via termica.

Usando della nota rappresentazione triangolare per il sistema Te-Ag-Au, occorre nel caso nostro conoscere dapprima i diagrammi di equilibrio dei due sistemi binari Te-Ag e Te-Au.

Questi due sistemi erano già stati studiati dal Pélabon <sup>(2)</sup>: ma sia perchè il Pélabon si è limitato a rendere noti soltanto i dati più caratteristici dei sistemi, sia per poter avere dei valori più confrontabili con le nostre ulteriori ricerche, abbiamo voluto, secondo il costume, studiarli di nuovo.

#### IL SISTEMA BINARIO Te-Ag.

Il Pélabon afferma che la curva di fusibilità delle miscele di argento e tellurio può essere costruita completamente. A partire dal punto di fusione

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Padova.

<sup>(2)</sup> C. R. 143, 295 (1906).

del tellurio ( $452^{\circ}$ ) la temperatura di solidificazione si abbasserebbe regolarmente fino a  $345^{\circ}$  dove si avrebbe un primo punto eutectico; poi la temperatura crescerebbe rapidamente fino a  $955^{\circ}$ , punto di fusione del tellururo d'argento  $\text{Ag}_2\text{Te}$ . Di poi la linea di fusibilità terminerebbe per due tratti pressochè rettilinei che si tagliano in un punto corrispondente a un secondo eutectico che fonde verso  $825^{\circ}$ . Sono questi gli unici dati forniti dal Pélabon, da cui si desume l'esistenza di un solo composto. Tuttavia egli avrà probabilmente eseguito diverse esperienze, per poter dare la rappresentazione grafica che risulta dalla figura annessa alla sua pubblicazione. Da essa si può calcolare approssimativamente la concentrazione dei due eutectici. Quello a  $345^{\circ}$  corrisponde a 33 % in peso Ag, cioè 36,7 atomi % Ag; quello a  $825^{\circ}$  corrisponde a 77 % in peso d'argento, cioè 80 atomi % Ag.

Le nostre determinazioni dimostrano che i dati del Pélabon erano forse troppo scarsi per poter cogliere tutte le caratteristiche del sistema, perchè oltre al composto  $\text{Ag}_2\text{Te}$ , se ne ha un altro della composizione verosimile  $\text{AgTe}$  che a temperatura più bassa subisce una trasformazione: di più la concentrazione degli eutectici è diversa da quella di Pélabon specie per quello  $\text{Ag}_2\text{Te} + \text{Te}$ , e così pure è diversa (circa  $47^{\circ}$ ) la temperatura corrispondente a quest'ultimo eutectico.

Facciamo osservare che il Puschin <sup>(1)</sup> determinando le differenze di potenziale delle pile a concentrazione  $\text{Ag} | \frac{1}{2} \text{ norm. AgNO}_3 | \text{AgTe}_x$  conferma l'esistenza del composto  $\text{Ag}_2\text{Te}$ .

Per via umida il composto si prepara facendo reagire la soluzione di tellururo di sodio con quella di acetato d'argento <sup>(2)</sup>, oppure la soluzione di nitrato d'argento col tellurio metallico, o la soluzione ammoniacale di cloruro d'argento col tellurio metallico <sup>(3)</sup>.

Le esperienze vennero eseguite nel solido modo, servendoci di un termoelemento Pt-PtRd, e di un galvanometro di Siemens e Halske.

Le leghe vennero protette dall'ossidazione mediante un'atmosfera di azoto. Le leghe fondenti ad alta temperatura vennero studiate in provette di porcellana riscaldate in un forno elettrico a resistenza di Heraeus, leggendo la temperatura ogni 5".

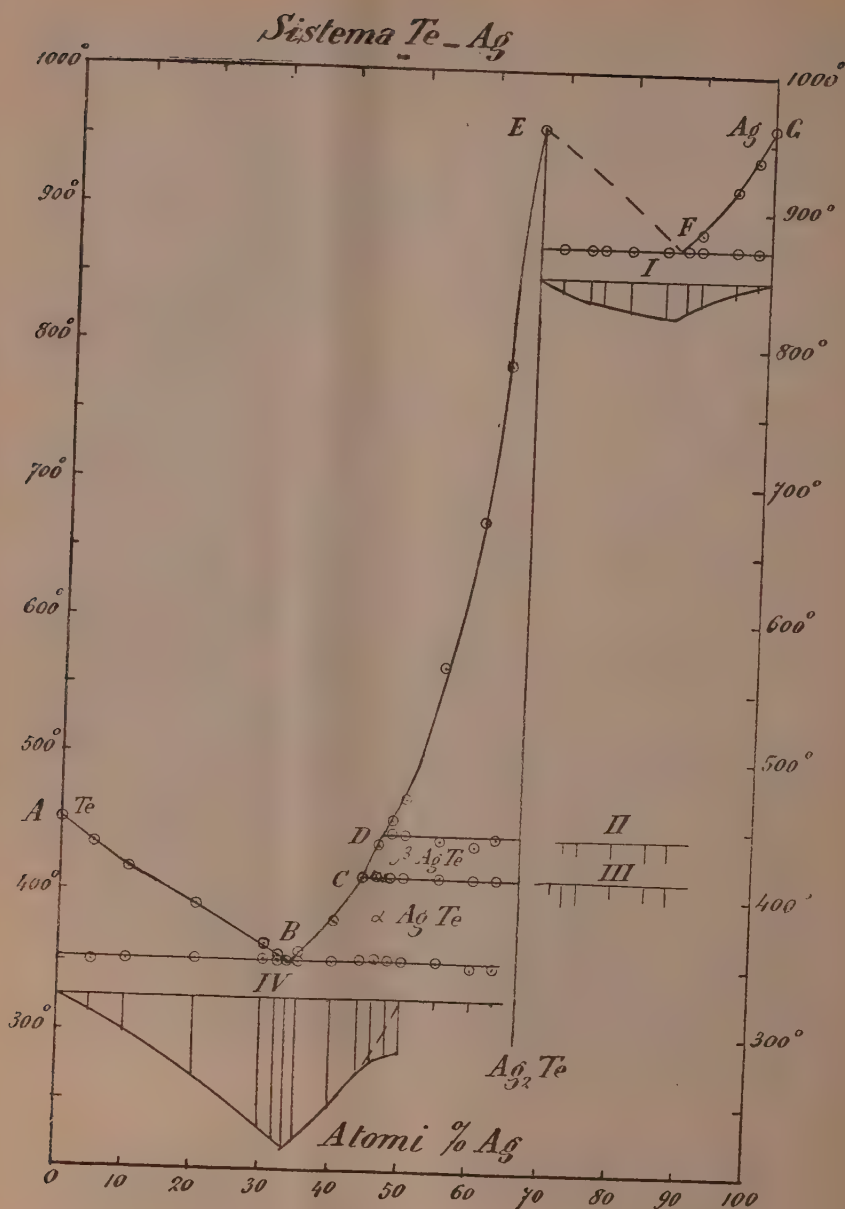
<sup>(1)</sup> Z. anorgan. Chemie, 56, 1 (1907).

<sup>(2)</sup> Tibbals, Jour. am. chem. Soc., 31, 902 (1909).

<sup>(3)</sup> Lenher, Chemical News, 101, 123 (1910).



| Numero<br>delle esperienze | Atomi<br>%<br>Argento | Principio<br>della<br>cristallizzazione | EQUILIBRI INVARIANTI |        |      |        |      |        |      |        |                    |
|----------------------------|-----------------------|-----------------------------------------|----------------------|--------|------|--------|------|--------|------|--------|--------------------|
|                            |                       |                                         | I                    |        | II   |        | III  |        | IV   |        |                    |
|                            |                       |                                         | t                    | durata | t    | durata | t    | durata | t    | durata |                    |
| 1                          | 0                     | 451°                                    | —                    | —      | —    | —      | —    | —      | —    | —      | Ag Te              |
| 2                          | 5                     | 485                                     | —                    | —      | —    | —      | —    | —      | 349° | 23''   |                    |
| 3                          | 10                    | 422                                     | —                    | —      | —    | —      | —    | —      | 351  | 52     |                    |
| 4                          | 20                    | 392                                     | —                    | —      | —    | —      | —    | —      | 351  | 109    |                    |
| 5                          | 30                    | 364                                     | —                    | —      | —    | —      | —    | —      | 352  | 185    |                    |
| 6                          | 32                    | 355                                     | —                    | —      | —    | —      | —    | —      | 351  | 200    |                    |
| 7                          | 33,3                  | —                                       | —                    | —      | —    | —      | —    | —      | 351  | 218    |                    |
| 8                          | 35                    | 357                                     | —                    | —      | —    | —      | —    | —      | 351  | 209    |                    |
| 9                          | 40                    | 380                                     | —                    | —      | —    | —      | —    | —      | 351  | 160    |                    |
| 10                         | 44                    | 412                                     | —                    | —      | —    | —      | 412° | —      | 351  | 105    |                    |
| 11                         | 46                    | 436                                     | —                    | —      | —    | —      | 412  | 4''    | 351  | 89     |                    |
| 12                         | 48                    | 454                                     | —                    | —      | 444° | 8''    | 412  | 14     | 351  | 85     |                    |
| 13                         | 50                    | 470                                     | —                    | —      | 443  | 9      | 412  | 13     | 351  | 80     |                    |
| 14                         | 55                    | 566                                     | —                    | —      | 440  | 11     | 412  | 8      | 350  | 16     |                    |
| 15                         | 60                    | 672                                     | —                    | —      | 436  | 14     | 412  | 10     | 347  | 15     |                    |
| 16                         | 63                    | 786                                     | —                    | —      | 442  | 13     | 412  | 13     | 347  | 4      |                    |
| 17                         | 66,7                  | 959                                     | —                    | —      | —    | —      | —    | —      | —    | —      | Ag <sub>2</sub> Te |
| 18                         | 70                    | —                                       | 872°                 | 18''   | —    | —      | —    | —      | —    | —      |                    |
| 19                         | 74                    | —                                       | 871                  | 30     | —    | —      | —    | —      | —    | —      |                    |
| 20                         | 76                    | —                                       | 872                  | 36     | —    | —      | —    | —      | —    | —      |                    |
| 21                         | 80                    | —                                       | 872                  | 42     | —    | —      | —    | —      | —    | —      |                    |
| 22                         | 85                    | —                                       | 872                  | 52     | —    | —      | —    | —      | —    | —      |                    |
| 23                         | 88                    | —                                       | 872                  | 40     | —    | —      | —    | —      | —    | —      |                    |
| 24                         | 90                    | 885                                     | 872                  | 33     | —    | —      | —    | —      | —    | —      |                    |
| 25                         | 95                    | 917                                     | 873                  | 17     | —    | —      | —    | —      | —    | —      |                    |
| 26                         | 98                    | 939                                     | 872                  | 9      | —    | —      | —    | —      | —    | —      |                    |
| 27                         | 100                   | 961                                     | —                    | —      | —    | —      | —    | —      | —    | —      |                    |



Dal punto di fusione A del tellurio (451°) la curva di cristallizzazione discende fino a 351° in un punto eutectico B della concentrazione di 33,3 atomi % Ag, poi sale rapidamente fino a E (959°) punto di fusione del composto Ag<sub>2</sub>Te. La curva ascendente presenta però nettamente due gomiti,

l'uno D alla temperatura di circa  $444^{\circ}$ , l'altro C a  $412^{\circ}$ . A queste due temperature corrispondono due equilibri invarianti.

Ciò è messo in evidenza dalla forma delle curve di raffreddamento delle leghe delle concentrazioni limiti 44-66,7 atomi % Ag. E precisamente le curve di raffreddamento delle concentrazioni 44-47 presentano un primo rallentamento e due arresti, il primo a  $412^{\circ}$ , il secondo alla temperatura eutectica  $351^{\circ}$ : le curve di raffreddamento delle concentrazioni 47-66,7 presentano un primo rallentamento e tre arresti a  $444^{\circ}$ ,  $412^{\circ}$  e  $351^{\circ}$ . Gli arresti a  $444^{\circ}$  e  $412^{\circ}$  avvengono generalmente con sopraffusione in ispecie per quelli a  $444^{\circ}$ : infatti questa temperatura non è raggiunta esattamente che in un solo caso.

Costante per quanto alle volte con sopraffusione è la temperatura di  $412^{\circ}$ . Gli arresti corrispondenti sono sempre troppo piccoli perchè si possano valutare esattamente le loro grandezze relative. Perciò da essi non si possono dedurre dati sicuri sulla natura delle reazioni che avvengono a  $444^{\circ}$  e  $412^{\circ}$ .

Non è ora facile il decidere la natura delle due fasi solide a cui corrispondono i due punti ora detti. La prima supposizione che potrebbe farsi è che si tratti di due successive modificazioni polimorfiche del tellururo  $\text{Ag}_2\text{Te}$ : tale supposizione deve però essere tosto abbandonata perchè gli arresti relativi dovrebbero in tal caso avere un massimo alla concentrazione  $\text{Ag}_2\text{Te}$  e proseguire anche oltre: mentre, come si dirà in seguito, ciò non accade.

Non resta quindi altra ipotesi possibile che quella che si tratti di un nuovo composto, con massimo coperto. La composizione di esso non può, per quanto fu detto sopra, essere rigorosamente determinata dalle durate degli arresti a  $444^{\circ}$ . Nemmeno può essere sicuramente dedotta, come in genere si fa, dal punto dove terminano gli arresti eutectici a  $351^{\circ}$ , come diremo subito. Noi crediamo però che si possa con grande verosimiglianza ritenere trattarsi del composto  $\text{AgTe}$  il quale si forma a  $444^{\circ}$  e subisce una trasformazione a  $412^{\circ}$ .

Una difficoltà nascerebbe dal prolungarsi degli arresti eutectici a  $351^{\circ}$  al di là della conc. 50 atomi % Ag. Infatti tali durate dopo aver raggiunto il massimo in corrispondenza dell'eutectico B, diminuiscono sensibilmente dapprima e poi rallentano verso le conc. 50 atomi % Ag. Sorpassata questa concentrazione diminuiscono bruscamente e si mantengono piccolissime fino a 63 atomi % Ag, dove un arresto eutectico è appena osservabile.

Senonchè il caso nostro è perfettamente preveduto dalla teoria e fu trattato dal Tammann e dal Ruer <sup>(1)</sup>, e trova poi un esempio pratico nelle ricerche sperimentali di R. Sahmen <sup>(2)</sup> sulle leghe di rame e cadmio.

(<sup>1</sup>) Ruer, *Metallographie in elementarer Darstellung*, 1907, pag. 126.

(<sup>2</sup>) R. Sahmen, *Zeit. anorg. Chemie*, 49, 301 (1906).

Le durate eutectiche a  $351^{\circ}$  dovrebbero teoricamente finire alla conc. di 50 atomi % Ag. Soltanto che la reazione di formazione del composto AgTe a  $444^{\circ}$  non corrisponde ad un caso di equilibrio completo, perciò le durate eutectiche si prolungano oltre la conc. del composto AgTe e di conseguenza le durate rappresentanti i calori di formazione del composto espresse graficamente, danno luogo a un diagramma supplementare II senza un massimo netto. Si deduce quindi dalle considerazioni su esposte, la formazione di un composto AgTe con massimo coperto. Lungo la curva ED si compie la cristallizzazione di  $\text{Ag}_2\text{Te}$  che a  $444^{\circ}$  reagisce con la massa fusa per formare il composto AgTe.

Più difficile risulta l'interpretazione degli arresti termometrici a  $412^{\circ}$ . Il loro diagramma III non presenta, come nel caso precedente, nessun massimo netto, sebbene verso la conc. di 50 atomi % Ag vi siano due valori elevati, ed ai lati due valori più bassi. Bisogna considerare tanto l'ipotesi della formazione di un nuovo composto, quanto quella di una trasformazione del composto AgTe. Questa seconda supposizione appare tuttavia la più probabile.

Il nuovo composto per corrispondere ad una altra formola possibile dovrebbe essere p. es.  $\text{Ag}_3\text{Te}_2$  con 60 atomi % Ag. Ora a questa concentrazione non si ha una durata massima di formazione, come dovrebbe essere anche perchè l'arresto corrispondente a  $351^{\circ}$  è piccolissimo. Si tratta dunque verosimilmente di una trasformazione del composto AgTe, il quale esiste in due modificazioni: l'una  $\beta$  AgTe che cristallizza lungo la curva DC, l'altra  $\alpha$  AgTe che cristallizza lungo la curva CB.

Il composto  $\text{Ag}_2\text{Te}$  presenta un punto di massimo assai netto. La curva di raffreddamento corrispondente osservata fino a bassa temperatura non presenta che il solo arresto a  $959^{\circ}$ . Ciò esclude che gli arresti a  $444^{\circ}$  e  $412^{\circ}$  possano attribuirsi a trasformazioni polimorfe del composto  $\text{Ag}_2\text{Te}$ .

La formola  $\text{Ag}_2\text{Te}$  corrisponde al minerale Hessite che cristallizza nella forma cubica. Si è creduto di rinvenire dei cristalli naturali incompleti corrispondenti a una modificazione rombica del tellururo d'argento. Il Groth<sup>(1)</sup> pone però in dubbio la reale esistenza di tale modificazione. L'analisi termica non riscontra, entro i limiti dell'esperienza, la supposta modificazione dell'Hessite.

A partire dalla concentrazione del composto  $\text{Ag}_2\text{Te}$  fino all'argento puro non si osserva altro che un punto eutectico alla conc. di circa 86-87 atomi % Ag, che cristallizza a  $872^{\circ}$ . Però le leghe delle conc. 66,7-87 atomi % Ag presentano un'anomalia; non è stato possibile osservare nessun inizio di cristallizzazione, operando nelle condizioni sperimentali più diverse, cioè agitando la massa o lasciandola in riposo, raffreddando lentamente o rapidamente, operando infine su una massa variabile da circa gr. 15 a gr. 40.

(<sup>1</sup>) Groth, Chemische Kristallographie, I Teil, 136.



Invece dalla conc. 88 a 100 atomi di Ag si osserva distintamente l'inizio della cristallizzazione. La temperatura eutectica è sempre la stessa fra 66,7-100 atomi Ag, e le durate eutectiche sono regolari. Ciò esclude che la mancanza di cristallizzazione iniziale possa dipendere da qualche fenomeno diverso da quello di un solo eutectico  $\text{Ag}_2\text{Te} + \text{Ag}$ . Una spiegazione plausibile si potrebbe trovare invece nel comportamento del composto  $\text{Ag}_2\text{Te}$  nell'atto della sua formazione. Il calore di formazione è stato trovato, con l'analisi termica, assai piccolo. Nulla di più naturale che diminuendo la concentrazione del composto col regolare crescere della concentrazione in argento, il calore sviluppato all'inizio della cristallizzazione e dovuto al composto, sia tanto piccolo da non essere osservabile col termoelemento. Noi abbiamo perciò soltanto tratteggiato quel ramo di curva che scende da E fino a F.

#### RISULTATI.

L'argento e il tellurio formano, nelle condizioni sperimentali, due composti  $\text{AgTe}$  e  $\text{Ag}_2\text{Te}$ . Il primo non era noto finora.

Il composto  $\text{AgTe}$  si forma a  $444^\circ$ , è decomponibile a temperatura più elevata, e verosimilmente subisce una trasformazione polimorfa a  $412^\circ$ . Esiste quindi come  $\alpha \text{AgTe}$  e  $\beta \text{AgTe}$ .

Il composto  $\text{Ag}_2\text{Te}$  fonde senza decomposizione a  $959^\circ$ , cioè a una temperatura di due gradi più bassa dell'argento puro: corrisponde nella composizione al minerale Hessite.

L'analisi termica non svela la supposta modificazione polimorfa dell'Hessite.

Nel diagramma si rinvencono due punti eutectici: il primo a 33,3 atomi % Ag che cristallizza a  $351^\circ$ ; il secondo a 86-87 atomi % Ag che cristallizza a  $872^\circ$ .

Le leghe hanno aspetto metallico cristallino: grigie quelle ricche in tellurio, biancastre quelle ricche in argento. La fragilità va diminuendo dal tellurio all'argento. Il composto  $\text{Ag}_2\text{Te}$  è grigio cristallino a struttura raggiata, fragile.

Il diagramma di equilibrio del sistema Ag-Te da noi determinato, pur coincidendo in vari punti con quello dato da Pélabon e non diversificando molto nella forma generale da esso, ne differisce però notevolmente in alcuni punti, segnatamente in ciò che si riferisce ai punti  $444^\circ$  e  $412^\circ$  da lui non osservati.

Chimica. — *Solfati anidri* <sup>(1)</sup>. Nota I di G. CALCAGNI e G. MANCINI, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Da molti anni numerosi studi sono stati fatti sopra i solfati idrati doppi e tripli che i solfati dei metalli alcalini (Na, K, Rb, Cs, NH<sub>4</sub>) sono capaci di formare specialmente con quelli di Ca e Mg. Tutti i noti lavori in questo campo di van't Hoff e dei suoi collaboratori miravano solo allo studio della formazione geologica dei sali che si trovano nelle miniere di Stassfurt.

Però, tranne i lavori di Mallet <sup>(2)</sup>, il quale preparò solfati doppi di tipo M'SO<sub>4</sub> . 2M''SO<sub>4</sub> e M'SO<sub>4</sub> . M'SO<sub>4</sub> con scopo esclusivamente cristallografico, manca uno studio sistematico dei solfati anidri. Noi l'abbiamo voluto intraprendere non limitandolo solo a quello dei solfati doppi e tripli che possono dare i metalli alcalini con gli alcalini terrosi, ma estendendolo anche agli altri metalli bivalenti (Pb, Fe, Cu, Mn ecc.), adoperando come metodo di ricerca principalmente l'analisi termica e non trascurando, per quanto è possibile, le variazioni delle altre proprietà fisiche: peso specifico, volume specifico, proprietà ottiche, cristallografiche, ecc.

In questo primo lavoro abbiamo descritta la curva di fusione dei miscugli di solfato di sodio e di solfato di calcio.

I solfati contenenti calcio che si trovano in natura sono: la Glauberite Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> . CaSO<sub>4</sub>, la Singenite K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> . CaSO<sub>4</sub> . H<sub>2</sub>O, la Polialite 2CaSO<sub>4</sub> . K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> . MgSO<sub>4</sub> . 2H<sub>2</sub>O, e la Krugite 4CaSO<sub>4</sub> . K<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> . MgSO<sub>4</sub> . 2H<sub>2</sub>O. Di questi solfati conosciamo bene la formazione primaria e secondaria, il giacimento, le temperature di trasformazione e la paragenesi, perchè sono stati studiati profondamente da van't Hoff nella seconda parte del suo *Bildung der ozeanischen Salzablagerungen*.

Ma artificialmente sono stati ottenuti altri sali contenenti sempre il metallo bivalente Ca. Il (NH<sub>4</sub>)<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>, per es., è capace di formare tutte le tre forme possibili di solfato doppio: la singenite d'ammonio, il sale dicalcico e il pentacalcico. J. D'Ans <sup>(4)</sup> ha ottenuto anche solfati doppi col Rb e Cs; col solfato di Rb ha ottenuto la singenite Rb<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> . CaSO<sub>4</sub> . H<sub>2</sub>O e il sale dicalcico Rb<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> . 2CaSO<sub>4</sub>, simili anche cristallograficamente con i corrispondenti composti di K e di NH<sub>4</sub>; col solfato di Cs ha ottenuto soltanto il sale dicalcico Cs<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> . 2CaSO<sub>4</sub> identico ai precedenti.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Roma.

<sup>(2)</sup> Journ. Ch. Soc. 77, 224, 217; 81, 1548.

<sup>(4)</sup> J. D'Ans, B. d. d. ch. Ges. 40, 1929, 4912; 41, 187.

Da uno studio comparativo di questi sali <sup>(1)</sup>, ottenuti tutti per cristallizzazione dei miscugli di soluzioni dei singoli solfati risulta che la capacità dei solfati dei metalli alcalini di formare col solfato di Ca uno o più dei tre possibili tipi di sali, dipende dal loro peso atomico; e che col crescere di questo i campi di esistenza dei solfati analoghi si spostano regolarmente verso temperature più basse. Questo spostamento è accompagnato da una diminuzione dei campi di esistenza dei solfati doppi idrati.

La determinazione del diagramma qui descritto offre delle grandissime difficoltà sia pel piccolissimo effetto termico di miscugli nella solidificazione e nelle trasformazioni allo stato solido, sia perchè  $\text{CaSO}_4$  si decompone al di sopra di  $1000^\circ$ . Questo fatto costituì non solo un grande inconveniente per la determinazione del suo punto di fusione, ma anche per quella delle temperature iniziali di congelamento di masse fuse che contenevano oltre il 70 % di  $\text{CaSO}_4$ . Non siamo riusciti in nessun modo a determinare direttamente il punto di fusione di  $\text{CaSO}_4$  per quanto rapidamente lo riscaldassimo, perchè la decomposizione era così rapida e profonda che si otteneva sempre, anche a temperatura molto elevata, una massa pastosa e densa. La temperatura che si deduce estrapolando la curva è circa  $1375^\circ$ ; Le Chatelier <sup>(2)</sup> dà  $1350^\circ$ .

Il solfato sodico fonde a  $887^\circ$ , temperatura che coincide quasi con quella data da Nacken <sup>(3)</sup> e da A. S. Giusberg <sup>(4)</sup>  $883^\circ$ ; Le Chatelier dà  $875^\circ$ . A  $234^\circ$  subisce una trasformazione enantiotropica con grandissimo svolgimento di calore. Questo punto di trasformazione ricompare solamente nei primi due miscugli vicini al solfato sodico puro, nei successivi non si nota più.

Il solfato di calcio purissimo era di Kahlbaum e quello di sodio di Merck; entrambi furono anzitutto sottoposti all'analisi.

Prima dell'uso furono riscaldati accuratamente per renderli anidri. La quantità di ogni miscuglio era di 20-25 grammi. Essi venivano fusi in un forno Heraeus a resistenza di platino, intimamente mescolati e poi lasciati raffreddare. La misura delle temperature si faceva di 15 in 15 secondi con un pirometro Siemens ed Halske ed una pinza termoelettrica Platino/Platinorodio. Di ogni miscuglio fu fatta anche la curva di riscaldamento.

I dati sperimentali sono riuniti nella seguente tabella e nel rispettivo diagramma.

<sup>(1)</sup> J. D'Ans, Z. f. Anorg. Ch. 62, 129.

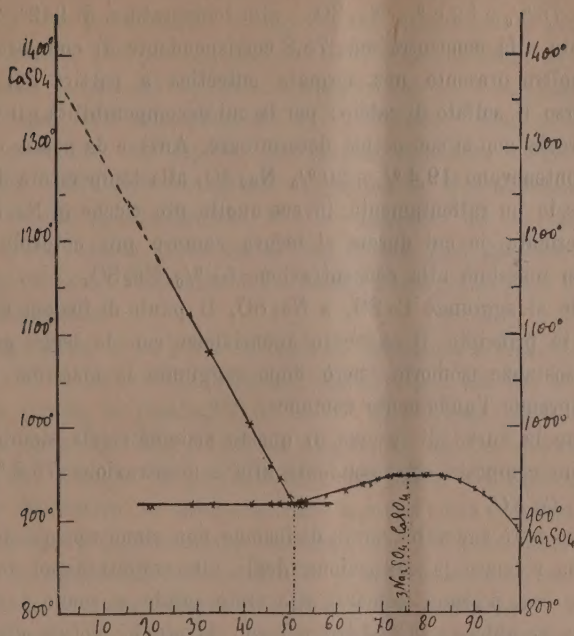
<sup>(2)</sup> Ann. des Mines, serie 9, T. 11, pag. 209 (1897).

<sup>(3)</sup> Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen 1907, 602.

<sup>(4)</sup> Z. f. Anorg. Ch. 61, 122.

| $\text{Na}_2\text{SO}_4$ %<br>in peso | $\text{CaSO}_4$ %<br>in peso | Mol. % di<br>$\text{Na}_2\text{SO}_4$ | Mol. % di<br>$\text{CaSO}_4$ | Temp. iniziale<br>di cristallizzazione | Eutectico |
|---------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|------------------------------|----------------------------------------|-----------|
| —                                     | 100                          | —                                     | 100                          | 1375°                                  | —         |
| 19,4                                  | 80,6                         | 18,75                                 | 81,25                        | 1155                                   | 914°      |
| 20                                    | 80                           | 19,36                                 | 80,64                        | 1152                                   | 913       |
| 28,5                                  | 71,5                         | 27,67                                 | 72,32                        | 1122                                   | 917       |
| 33                                    | 67                           | 32                                    | 68                           | 1080                                   | 917       |
| 41,6                                  | 58,4                         | 40,52                                 | 59,48                        | 1005                                   | 917       |
| 45,7                                  | 54,3                         | 44,68                                 | 55,32                        | 957                                    | 917       |
| 47,8                                  | 52,2                         | 46,73                                 | 53,27                        | 940                                    | 917       |
| 49,8                                  | 50,2                         | 48,77                                 | 51,23                        | 925                                    | 917       |
| 51                                    | 49                           | 49,93                                 | 50,07                        | —                                      | 917       |
| 52                                    | 48                           | 50,93                                 | 49,07                        | 918                                    | 917       |
| 53                                    | 47                           | 51,93                                 | 48,07                        | 920                                    | 917       |
| 57,8                                  | 42,2                         | 56,75                                 | 43,25                        | 925                                    | 917       |
| 61,7                                  | 38,3                         | 60,65                                 | 39,35                        | 931                                    | —         |
| 65,5                                  | 34,5                         | 64,5                                  | 35,5                         | 938                                    | —         |
| 67,5                                  | 32,5                         | 66,55                                 | 33,45                        | 939                                    | —         |
| 69,2                                  | 30,8                         | 68,29                                 | 31,71                        | 944                                    | —         |
| 71                                    | 29                           | 70,16                                 | 29,84                        | 946                                    | —         |
| 72                                    | 28                           | 71,12                                 | 28,88                        | 947                                    | —         |
| 73                                    | 27                           | 72,15                                 | 27,85                        | 948                                    | —         |
| 74                                    | 26                           | 73,17                                 | 26,83                        | 948                                    | —         |
| 75,8                                  | 24,2                         | 75                                    | 25                           | 949                                    | —         |
| 77                                    | 23                           | 76,23                                 | 23,77                        | 949                                    | —         |
| 79                                    | 21                           | 77,88                                 | 22,12                        | 948                                    | —         |
| 80                                    | 20                           | 79,30                                 | 20,70                        | 949                                    | —         |
| 82,6                                  | 17,4                         | 81,97                                 | 18,03                        | 949                                    | —         |
| 83,5                                  | 16,5                         | 82,89                                 | 17,11                        | 946                                    | —         |
| 85,2                                  | 14,8                         | 84,66                                 | 15,34                        | 944                                    | —         |
| 86,9                                  | 13,1                         | 86,41                                 | 13,59                        | 943                                    | —         |
| 90                                    | 10                           | 89,61                                 | 10,39                        | 935                                    | —         |
| 92                                    | 8                            | 91,68                                 | 8,32                         | 929                                    | —         |
| 93,6                                  | 6,4                          | 92,85                                 | 7,15                         | 923                                    | —         |
| 99,2                                  | 0,8                          | 99,17                                 | 0,83                         | 893                                    | —         |
| 100                                   | —                            | 100                                   | —                            | 887                                    | —         |





L'aspetto delle curve descritte per ogni singolo miscuglio è semplicissimo. Quelle che vanno da 20 % a 57,8 % circa di  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  mostrano un gomito e poi una fermata a 917°; le altre mostrano solamente un gomito e in tutto il resto corrono regolarmente senza la minima discontinuità.

Questa circostanza rende molto difficile la interpretazione della natura delle complicate reazioni che avvengono tra questi due sali. Ed è tanto più difficile perchè forti accrescimenti nella concentrazione di  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  producono variazioni della temperatura iniziale di congelamento appena sensibili, per stabilire le quali siamo stati costretti a ripetere più volte i miscugli e le determinazioni.

Tra le concentrazioni 0 e 19,4 %  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  non si son potuto ottenere fusioni poichè a temperature troppo elevate si svolgeva abbondantemente  $\text{SO}_3$ , il che modificava le concentrazioni.

Le masse fuse sono quasi tutte identiche; nel congelamento non divengono tutte opache come in generale accade, ma quelle più ricche in  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  restano trasparenti come vetri fino alla temperatura ordinaria; ciò dimostra che i cristalli sono tutti della stessa natura.

Il diagramma qui descritto a prima vista somiglia molto a quello di Le Chatelier (l. c.), ma in sostanza ne differisce notevolmente. Quello di Le Chatelier ha un massimo nel punto corrispondente al composto  $2\text{Na}_2\text{SO}_4$ .

$\text{CaSO}_4$ ; invece quello qui descritto ha una lacuna di miscibilità allo stato liquido tra 73 % e 82,6 %  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ , alla temperatura di 949°, con la massima fermata alla concentrazione 75,8 corrispondente al composto  $3\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot \text{CaSO}_4$ . Inoltre presenta una fermata eutectica a partire dal punto 57,8  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  verso il solfato di calcio; per la cui decomponibilità gli ultimi punti di questa retta non si son potuti determinare. Anzi è da notare che le masse fuse che contenevano 19,4 % e 20 %  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  alla temperatura di 917° presentavano solo un rallentamento, invece quelle più ricche in  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  un vero punto di fermata, la cui durata si faceva sempre più notevole fino a raggiungere un massimo alla concentrazione 51 %  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ .

Quando si aggiunge  $\text{CaSO}_4$  a  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  il punto di fusione del miscuglio si innalza in principio, il che è in apparizione con la legge generale e fa pensare a sostanze isomorfe; però dopo raggiunta la massima temperatura la curva riprende l'andamento comune.

Dunque la curva di fusione di questo sistema rivela sicuramente l'esistenza di un composto corrispondente alla concentrazione 75,8 %  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ ,  $3\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot \text{CaSO}_4$ .

Il fatto però che sulla curva di fusione non siano apparsi fenomeni termici tali da rivelare la formazione degli altri solfati doppi possibili, non esclude che essi possano formarsi allo stato solido a mano a mano che la temperatura si abbassa. Ginsberg nel suo lavoro ha potuto dimostrare che allo stato solido vi è formazione della vantoffite  $3\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot \text{MgSO}_4$  e dell'astracante anidra  $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot \text{MgSO}_4$ , non ostante che sulla curva di fusione non apparisse alcuna discontinuità. Ma egli aveva osservato sulle curve di congelamento fenomeni, che noi non abbiamo potuto notare nel nostro sistema sia per le condizioni sperimentali, sia forse per la loro esiguità.

Ma abbiamo osservati fatti che potrebbero far supporre come le condizioni nelle quali si svolge l'analisi termica potrebbero essere anche quelle di formazione dei solfati doppi non apparsi. Se si misurano le durate delle fermate eutectiche risulta che esse hanno un massimo alla concentrazione 51 %  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  e uno dei minimi poco al di là della concentrazione 19,4 %  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ ; e se si considera che i punti di cristallizzazione iniziale delle masse fuse estreme sono a 1150°-1155°, mentre dovrebbero essere a circa 1200°, si conclude che probabilmente sulla curva di fusione apparirebbe un gomito alla concentrazione 83 %  $\text{CaSO}_4$  corrispondente al solfato doppio pentacalcico, il quale è stato ottenuto già per altra via. Ma ciò sicuramente non si può affermare, non essendosi potuto andare oltre la concentrazione accennata per la decomponibilità di  $\text{CaSO}_4$ .

Inoltre la massa fusa 51 %  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  (minimo sulla curva di fusione), che corrisponde alla composizione della glauberite,  $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot \text{CaSO}_4$ , ha una curva di raffreddamento completamente identica a quella di questo solfato doppio ottenuto artificialmente secondo le norme di van't Hoff (l. c.) ed ha peso specifico 2,748, mentre di essa Groth dà 2,77.



Oltre a ciò è anche notevole quanto segue: Di tutte le masse fuse esaminate noi abbiamo determinati i volumi specifici adoperando il pnenometro e il bromuro d'etilene. Nei pesi specifici così determinati abbiamo avute piccole oscillazioni nella terza cifra decimale. La curva che ne è risultata presenta un punto di flesso alla concentrazione 51 %  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ , fatto notevole, che confermato dalle altre su esposte osservazioni, dimostra come allo stato solido vi debba essere stato formazione di glauberite. Non abbiamo descritta la curva dei volumi specifici poichè non è completa: da un lato è interrotta dalla lacuna liquida, le cui masse fuse davano pesi specifici discordantissimi, il che conferma l'esistenza della lacuna stessa; dall'altro dalla mancanza delle masse fuse.

Il composto di cui si ha prova evidente di formazione è  $3\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot \text{CaSO}_4$ , che finora non si includeva tra i possibili solfati doppi del Ca, nè era stato ottenuto. Uno simile, la vanthoffite  $3\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot \text{MgSO}_4$  che esiste in natura, ottennero Nacken e Ginsberg (l. c.) nel diagramma da loro descritto.

Il composto ottenuto da L. Chatelier corrisponde a  $2\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot \text{CaSO}_4$ ; ma dobbiamo far notare in proposito che la massa fusa corrispondente ad esso accuratamente e ripetutamente esaminata non ha dimostrata alcuna irregolarità; il suo punto di fusione è  $939^\circ$  e ben coincidente con la curva.

Concludendo in questo diagramma si è potuto osservare:

che si forma un composto corrispondente alla vanthoffite, il quale non ha un punto di fusione suo proprio, ma si trova in una lacuna liquida;

che la lacuna liquida è il primo esempio della sua specie, per quanto io sappia, che finora si sia presentata;

che infine si sono osservati fenomeni per i quali si potrebbe arguire che facilmente possono essersi formati altri due solfati doppi nelle condizioni sperimentali nostre: la glauberite e il sale pentacalcico.

E. M.

---

